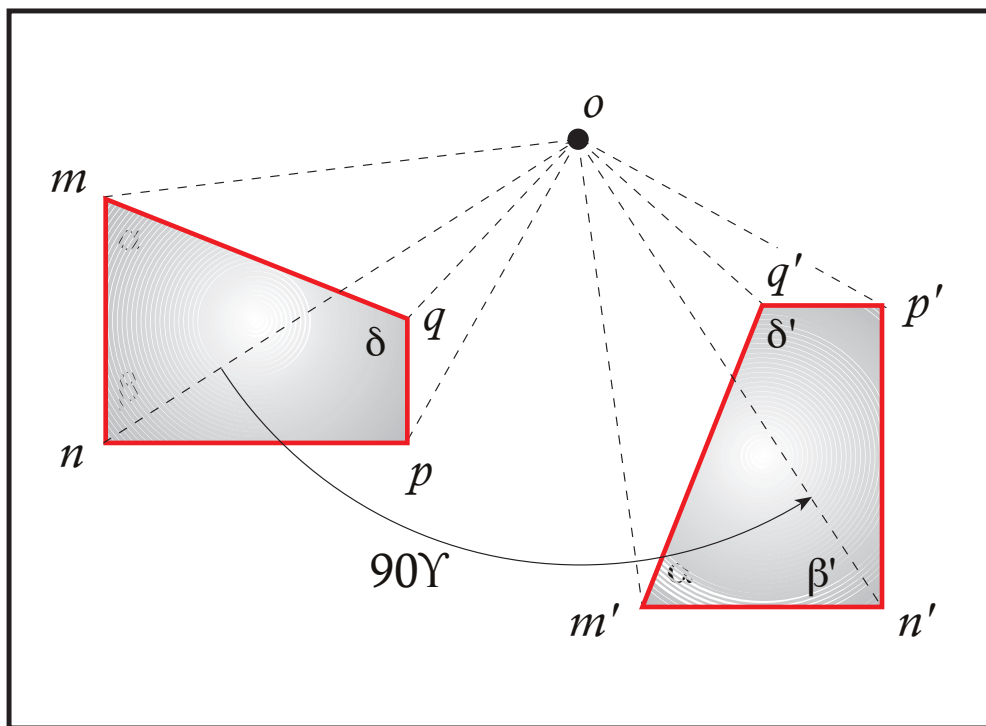


MATEMÁTICA

Segundo Año de Bachillerato

JÚPITER FIGUERA YIBIRÍN



JÚPITER FIGUERA YIBIRÍN

Profesor del Dpto. de Física de la Universidad de Oriente
Venezuela

MATEMÁTICA
SEGUNDO AÑO BACHILLERATO

PUBLITEXT
THE TEXT BOOK COMPANY

JÚPITER FIGUERA YIBIRÍN
MATEMÁTICA SEGUNDO AÑO DE BACHILLERATO

Editor:
Publitext C. A.

Diseño de Portada:
Júpiter Figuera Yibirín

Composición de Textos, dibujos y Diagramación:
PUBLITEXT C. A.
Cumaná - Edo. Sucre - Venezuela
Tlf. +58 293-4672928
EMAIL: jfigueray@gmail.com

ISBN 980-262-458-6
Marzo 14, 2018

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos y dedicatoria

viii

Capítulo 1: Relaciones y funciones

1.1 Relaciones, dominio y rango	1
1.2 Funciones	3
1.3 Funciones biyectivas	10

Capítulo 2: Operaciones en $\mathbb{Z}$

2.1 El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros	12
2.2 Subconjuntos notables de $\mathbb{Z}$	13
2.3 La adición de números enteros	13
2.4 Elemento neutro de la adición en $\mathbb{Z}$	14
2.5 Elemento simétrico u opuesto de la adición en $\mathbb{Z}$	14
2.6 Sustracción de dos números enteros	14
2.7 Multiplicación de números enteros	14
2.8 Regla de los signos	15
2.9 Elemento neutro de la multiplicación	16
2.10 Multiplicación por cero	16
2.11 Ecuaciones en $\mathbb{Z}$. Problemas con ecuaciones en $\mathbb{Z}$	16

Capítulo 3: Operaciones en $\mathbb{Q}$

3.1 El conjunto $\mathbb{F}$ de las fracciones	20
3.2 El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales	20
3.3 Subconjunto notables de $\mathbb{Q}$	20
3.4 Adición de fracciones	21
3.5 Sustracción de fracciones	22
3.6 Operaciones combinadas de adición y sustracción de fracciones	22
3.7 Adición y sustracción de fracciones con signos de agrupación	22
3.8 Multiplicación de dos fracciones	24
3.9 Cociente de dos fracciones	24
3.10 Ejercicios combinados de adición, sustracción, multiplicación, y división de fracciones	25
3.11 Problemas de adición y sustracción de fracciones	25
3.12 Multiplicación y división de fracciones. Problemas	27

Capítulo 4: Proyecciones ortogonales

4.1 Proyección oblicua y proyección ortogonal	29
4.2 Proyección ortogonal de un punto sobre una recta	29
4.3 Proyección ortogonal de un segmento sobre una recta	30

Capítulo 5: Coordenadas rectangulares

5.1	Sistemas de coordenadas rectangulares	33
5.2	Coordenadas de un punto	33
5.3	Puntos notables en un sistema de coordenadas	34
5.4	Gráfico de una función	36

Capítulo 6: La función afín

6.1	La función afín	38
6.2	Casos particulares de la función afín	40

Capítulo 7: Vectores en el plano

7.1	Vectores	43
7.2	Representación de vectores en el plano cartesiano	43
7.3	Elementos de un vector	44
7.4	Vectores opuestos	46
7.5	Vectores paralelos y perpendiculares	46
7.6	Vector Nulo	46
7.7	Componentes de un vector	46

Capítulo 8: Vectores equipolentes

8.1	Vectores equipolentes	49
8.2	Identificación geométrica de vectores equipolentes	49
8.3	Trazado de un vector equipolente a otro vector dado	50

Capítulo 9: Adición de vectores

9.1	Adición de vectores de origen común	53
9.2	Adición de vectores de distintos orígenes	54
9.3	Adición de vectores de igual dirección y sentido	56
9.4	Adición de vectores de igual dirección y sentidos contrarios	56
9.5	Determinación de los vectores que forman un vector suma	56
9.6	Adición analítica de vectores	57

Capítulo 10: Propiedades de la adición de vectores

10.1	Propiedad conmutativa de la adición de vectores	61
10.2	Propiedad asociativa de la adición de vectores	62
10.3	El elemento neutro de la adición de vectores	62
10.4	El elemento simétrico u opuesto de un vector dado	63
10.5	Sustracción de vectores	63
10.6	Producto de un número racional por un vector	65
10.7	Producto de un número racional por una suma de vectores	66
10.8	Producto de una suma de números racionales por un vector	67
10.9	Producto de un número racional p por un vector	67
10.10	Multipliación de un vector por la unidad	67

Capítulo 11: Traslación de figuras planas

11.1	Traslación de figuras en un plano. Vector de traslación	69
11.2	Traslación de un punto. Vector de traslación	69
11.3	Traslación de figuras planas. Isometría	70

Capítulo 12: Rotación de figuras planas

12.1	Ángulos orientados	74
12.2	Rotaciones	74
12.3	Determinación del centro y ángulo de rotación dadas una figura y su imagen producida por rotación	78
12.4	La rotación como una isometría	79

Capítulo 13: Simetría Axial

13.1	Simetría axial. Eje de simetría	82
13.2	Imágenes de figuras mediante simetría axial	82
13.3	La simetría axial como una isometría	83

Capítulo 14: Figuras congruentes

14.1	Figuras y ángulos congruentes	85
14.2	Congruencia y transformaciones en el plano	86
14.3	Elementos homólogos en figuras congruentes	86

Capítulo 15: Congruencia de triángulos

15.1	Criterios de congruencia de triángulos	88
------	--	----

Capítulo 16: Ángulos opuestos por el vértice

16.1	Rectas secantes. Ángulos opuestos por el vértice	91
16.2	Definición de ángulos opuestos por el vértice	91

Capítulo 17: Rectas secantes y paralelas

17.1	Ángulos formados por una recta secante a dos rectas paralelas	94
17.2	Ángulos correspondientes	94
17.3	Ángulos alternos internos	95
17.4	Ángulos alternos externos	95
17.5	Ángulos opuestos por el vértice	95

Capítulo 18: La función polinómica

18.1	La función polinómica de una variable. Definiciones básicas	98
18.2	Funciones polinómicas y no polinómicas	100
18.3	Ordenación de polinomios	100
18.4	Términos semejantes. Polinomios iguales. Polinomios nulos y constantes	101
18.5	Clasificación de los polinomios según el número de términos	102

Capítulo 19: Adición de polinomios

19.1	Expresión polinómica de un número natural	104
19.2	Adición de dos números naturales expresados en forma polinómica	104
19.3	Adición de monomios	105
19.4	Adición de polinomios	105

Capítulo 20: Adición de polinomios. Propiedades

20.1	Propiedad asociativa de la adición de polinomios	109
20.2	Propiedad conmutativa de la adición de polinomios	109
20.3	El elemento neutro en la adición de polinomios	110
20.4	Polinomio opuesto a otro polinomio $P(x)$	110
20.5	Sustracción de polinomios	110

Capítulo 21: Multiplicación de polinomios

21.1	Multiplicación de dos números expresados en forma polinómica	112
21.2	Multiplicación de una constante por un polinomio	112
21.3	Multiplicación de monomios	113
21.4	Multiplicación de un monomio por un polinomio	113
21.5	Multiplicación de polinomios	114

Capítulo 22: Multiplicación de polinomios. Propiedades.

22.1	Propiedad conmutativa de la multiplicación de polinomios	117
22.2	Propiedad asociativa de la multiplicación de polinomios	117
22.3	El elemento neutro en la multiplicación de polinomios	117
22.4	La propiedad distributiva en la multiplicación de polinomios	118
22.5	Operaciones combinadas de adición, sustracción y multiplicación de polinomios	119

Capítulo 23: Productos notables

23.1	Productos notables	120
23.2	El cuadrado de la suma	120
23.3	Trinomio cuadrado perfecto. Factorización.	121
23.4	El cuadrado de la diferencia	123
23.5	Visualización gráfica del cuadrado de la suma	124
23.6	Visualización gráfica del cuadrado de la diferencia	125
23.7	Producto de una suma de dos términos por su diferencia	125
23.8	Visualización gráfica de una diferencia de cuadrados	127

Capítulo 24: División de polinomios

24.1	División de monomios	128
24.2	División de un polinomio por un monomio	128
24.3	División de un polinomio por otro polinomio	130

Capítulo 25: Valor numérico de un polinomio

25.1	Valor numérico de una función polinómica	132
25.2	Ceros de una función polinómica	132

Capítulo 26: Probabilidad de sucesos independientes

26.1	El concepto de probabilidad	134
26.2	Sucesos independientes	134
26.3	Probabilidad de sucesos independientes	135

Capítulo 27: Media aritmética y moda

27.1	Media aritmética de datos no organizados. Moda de una distribución	139
27.2	Frecuencia absoluta. Distribución de frecuencias.	140
27.3	Distribución de frecuencias para datos agrupados	141
27.4	Media aritmética y moda de datos no organizados	143

Capítulo 28: Algoritmos. Diagramas de flujo.

28.1	Algoritmos. Diagramas de flujo	146
-------------	--------------------------------	-----

Capítulo 29: Lenguajes de Programación

29.1	Lenguajes de programación	152
29.2	Tipos de software	152
29.3	Lenguajes de programación	153
29.4	Traductores de lenguaje	155
29.5	Sistemas operativos	155

Respuestas a los ejercicios	157
------------------------------------	-----

Bibliografía	165
---------------------	-----

Agradecimientos

Un libro es una conjunción de esfuerzos. A quienes contribuyeron para que unos apuntes organizados se convirtieran en el presente texto, expreso mi fraternal reconocimiento. En especial debo mencionar a las siguientes personas de la Universidad de Oriente:

Prof. Oscar Díaz L. del Dpto. de Química .
Lic. Eusebio Pérez B. del Dpto. de Castellano.
Lic. Juan Carlos Márquez del Dpto. de Física.
Lic. José Maduro del Dpto. de Física.
Ing. Oscar Pizarro.
Lic. María Rodríguez del Dpto. de Física.

Igualmente debo mencionar al Prof. Rubén Gómez, mi profesor de Matemática del liceo Antonio José de Sucre en Cumaná, por su influencia como fuente de sabiduría y constancia. Francisco Betancourt, Carlos Alfonzo y Anamary Vásquez fueron los artífices de la diagramación de este libro de texto.

Dedicatoria

En este torbellino de la Venezuela actual, hay que reconocer la labor meritoria de los maestros verdaderos, que todavía abundan, y que hacen posible mantener la esperanza de que las flores vuelvan a fructificar. A los padres que hacen denodados esfuerzos por mantener abiertos los senderos de la Patria Buena para sus hijos.

A mis amigos, Rómulo Romero y Juan Guerrero.

1

RELACIONES Y FUNCIONES

1.1 RELACIONES, DOMINIO Y RANGO

Los conceptos de relación y función son dos de los más importantes en Matemática.

Una relación es una asociación entre los elementos de dos conjuntos.

Si consideramos dos conjuntos, A y B , la asociación de los elementos de algún subconjunto de A y los elementos de algún subconjunto de B , constituye una relación. Al subconjunto formado por los elementos de A que intervienen en la relación se le denomina *dominio de la relación*, mientras que al subconjunto de B , cuyos elementos están en correspondencia con los del conjunto A , se le denomina *imagen o rango de la relación*. Considera los conjuntos:

$$A = \{1, 3, 5\} \quad B = \{2, 4, 6\} \quad (1.1)$$

La relación entre los dos conjuntos puede representarse de varias maneras. En la fig. 1.1 se muestran *diagramas sagitales* que especifican relaciones entre los conjuntos A y B . A estas relaciones las denotamos con la letra f . A es el *conjunto de partida* y B es el *conjunto de llegada*.

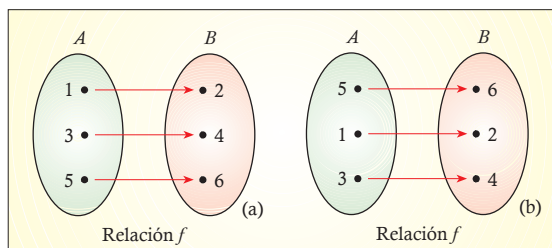


Fig. 1.1 Dos relaciones distintas para los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5\} \text{ y } B = \{2, 4, 6\}.$$

En este caso, el dominio de la relación f está representado por el conjunto A , mientras que el rango de f es el conjunto B . Para la relación f de la fig. 1.1(a) podemos decir que 2 es la imagen de 1, 4 es la imagen de 3 y 6 es la imagen de 5. Similarmente, para la fig. 1.1(b), podemos decir que, mediante la relación g , 6 es la imagen de 5, 2 es la imagen de 1 y 4 es la imagen de 3.

Las relaciones f de la fig. 1.1 no son las únicas que se pueden establecer entre los conjuntos A y B . En la fig. 1.2, por ejemplo, se muestran las relaciones g y h entre A y B .

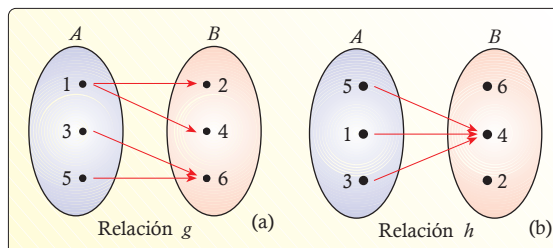


Fig. 1.2 Otras relaciones para los conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$.

Para la relación g podemos escribir:

- El dominio es A .
- El rango es B , ya que todos los elementos de B entran en la relación g .
- 2 y 4 son imágenes de 1 mediante la relación g .
- 6 es la imagen tanto de 3 como de 5 bajo la relación g .

Para la relación h podemos escribir:

- El dominio es A .
- El rango es $\{4\}$, ya que sólo este elemento de B entra en la relación h .
- 4 es la imagen de todos los elementos de A . A este tipo de relación, representada en la fig. 1.2(b), se le llama *relación constante*.

Otra forma de representar las distintas relaciones entre los elementos de dos conjuntos es mediante **pares ordenados**. Para las relaciones de las figuras 1.1 y 1.2, las representaciones son:

$$f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\} \quad (\text{fig. 1.1a})$$

$$f = \{(5, 6), (1, 2), (3, 4)\} \quad (\text{fig. 1.1b})$$

$$g = \{(1, 2), (1, 4), (3, 6), (5, 6)\} \quad (\text{fig. 1.2a})$$

$$h = \{(1, 4), (3, 4), (5, 4)\} \quad (\text{fig. 1.2b})$$

Como puedes notar, cada par ordenado posee dos componentes: el primer componente proviene del dominio de la relación, mientras que el segundo componente es la imagen del primero. Bajo esta nueva representación podemos decir que:

Una relación es un conjunto de pares ordenados.

El conjunto de los primeros componentes de los pares ordenados forman el *dominio de la relación*, mientras que el conjunto de los segundos componentes de los pares ordenados forman el *rango de la relación*.

EJEMPLO 1.1

Escribe las relaciones mostradas en la fig. 1.3 como conjuntos de pares ordenados y establece el dominio y el rango de cada una de ellas.

Solución

Relación a :

$$a = \{(3, 2), (-5, -7), (1, 5)\}$$

$$\text{Dominio} = A = \{3, -5, 1\} \quad \text{Rango} = B = \{2, -7\}$$

$$\text{Relación } b: \quad b = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), (3, -3), (1, -1) \right\}$$

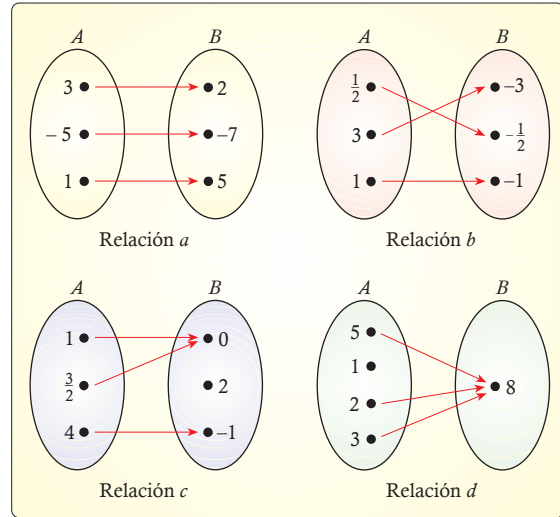


Fig. 1.3 Relaciones para el ejemplo 1.1.

$$\text{Dominio} = A = \left\{ \frac{1}{2}, 3, 1 \right\} \quad \text{Rango} = B = \left\{ -\frac{1}{2}, -3, -1 \right\}$$

Relación c :

$$c = \left\{ (1, 0), \left(\frac{3}{2}, 0 \right), (4, -1) \right\}$$

$$\text{Dominio} = A = \left\{ 1, \frac{3}{2}, 4 \right\} \quad \text{Rango} = B = \{0, -1\}$$

Observa que el rango, en este caso, no es igual al conjunto B .

Relación d :

$$d = \{(5, 8), (2, 8), (3, 8)\}$$

$$\text{Dominio} = \{5, 2, 3\} \quad \text{Rango} = \{8\}$$

EJEMPLO 1.2

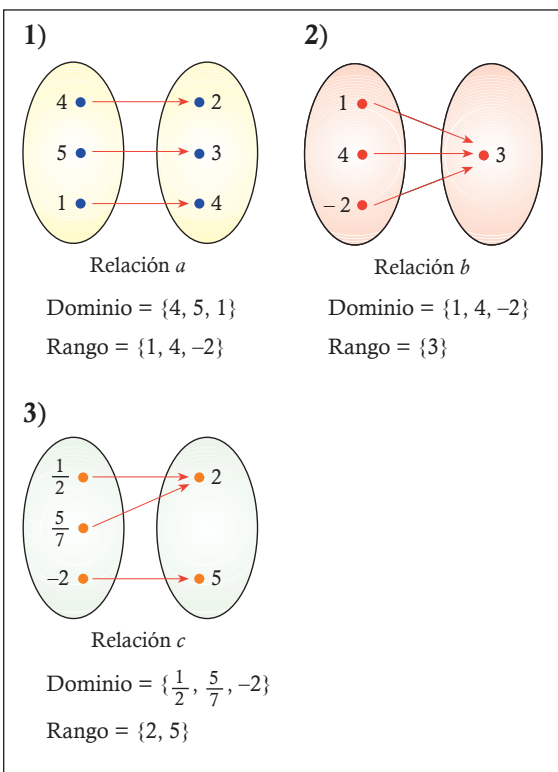
Para cada una de las relaciones dadas, dibuja un diagrama sagital y establece el dominio y el rango:

$$1) a = \{(4, 2), (5, 3), (1, 4)\}$$

$$2) b = \{(1, 3), (4, 3), (-2, 3)\}$$

$$3) \left\{ \left(\frac{1}{2}, 2 \right), \left(\frac{5}{7}, 2 \right), (-2, 5) \right\}$$

Solución



EJERCICIOS

1.1 Para los diagramas sagitales de la fig. 1.4, escribe las relaciones correspondientes como pares ordenados y establece su dominio y rango.

1.2 Para las relaciones dadas, dibuja un diagrama sagital y establece el dominio y el rango.

a) $f = \{(5, -3), (-2, 1), (4, 3)\}$

b) $g = \{(-7, 0), (5, 0), (5, -3), (6, -3)\}$

c) $h = \{(0, 5), (0, -2), (-3, 1), (-2, 1)\}$

d) $r = \{(a, b), (c, d), (o, b, (c, o))\}$

e) $s = \left\{ (5, 1), (3, 1), \left(-\frac{7}{2}, 1\right) \right\}$

f) $y = \left\{ \left(2\frac{1}{4}, -2\right), \left(-\frac{1}{9}, 1\right), (0, -1) \right\}$

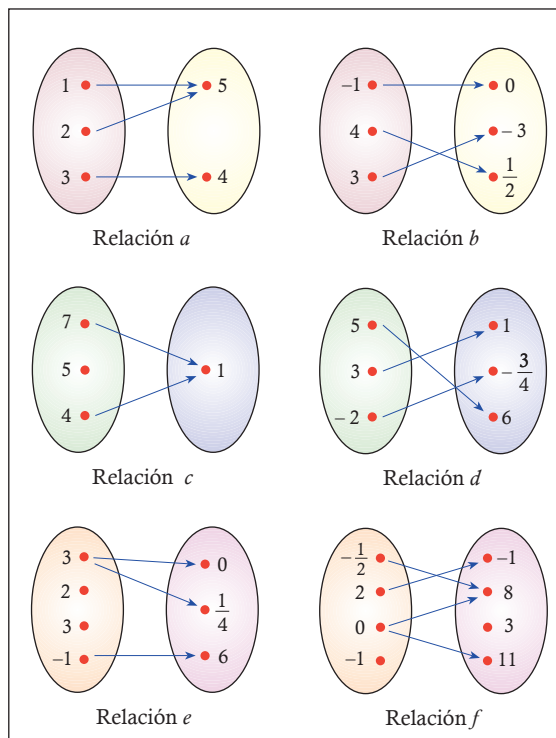


Fig. 1.4 Ejercicio 1.1.

1.3 Dada la relación:

$$g = \left\{ (5, 1), \left(\frac{3}{4}, 2\right), (-3, -5), (1, 2), (5, 0) \right\}$$

Completa lo siguiente:

a) La imagen de -3 es _____

b) 0 es la imagen de _____

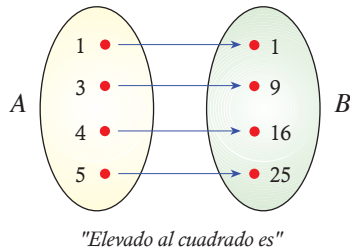
c) 5 tiene _____ imágenes

d) El dominio de g es _____

e) El rango de g es _____

1.2 FUNCIONES

Vimos en la sección 1.1 que una relación puede representarse mediante un diagrama sagital o mediante pares ordenados. De acuerdo a esto, la relación "elevado al cuadrado es" para el conjunto $A = \{1, 3, 4, 5\}$ puede representarse de las maneras siguientes:



Primer componente

$$f = \{(1, 1), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$$

Segundo componente

Una función es una relación que cumple con las siguientes condiciones:

a) Todos los elementos del conjunto de partida tienen imágenes en el conjunto de llegada.

b) Cada elemento del conjunto de partida tiene una sola imagen en el conjunto de llegada.

Entonces, como se deduce del diagrama sagital anterior, la relación descrita es una función, ya que todos los elementos de A tienen una imagen en B y cada elemento de A tiene solamente una imagen en B .

Si ponemos atención a la descripción de una relación mediante pares ordenados, podemos establecer que una función es una relación en la cual cada primer componente tiene solamente una imagen. Así por ejemplo, la relación:

$$s = \{(1, 5), (3, 4), (3, 6), (2, 7)\}$$

no es una función, ya que el número 3 aparece dos veces (2 imágenes) como primer componente.

Las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} g &= \{(5, 1), (3, 4), (1, 7)\} \\ h &= \{(3, 5), (4, 5), (7, 3)\} \end{aligned}$$

son funciones ya que cada primer componente aparece una sola vez en los pares ordenados.

Para indicar el dominio de una función se utiliza la expresión general D_f , mientras que el rango o imagen se representa por R_f o I_f . Así, por ejemplo, el dominio y el rango de las funciones f , g y h anteriores son:

$$D_f = \{1, 3, 4, 5\} \quad R_f = \{1, 9, 16, 25\}$$

$$D_g = \{5, 3, 1\} \quad R_g = \{1, 4, 7\}$$

$$D_h = \{3, 4, 7\} \quad R_h = \{5, 3\}$$

Considera la fig. 1.5 donde A es el conjunto de partida y B es el conjunto de llegada. x es un elemento cualquiera de A , mientras que y es su imagen. Si cada elemento del conjunto A tiene sólo una imagen en el conjunto B y cada elemento de A tiene imagen en B , la relación es una función.

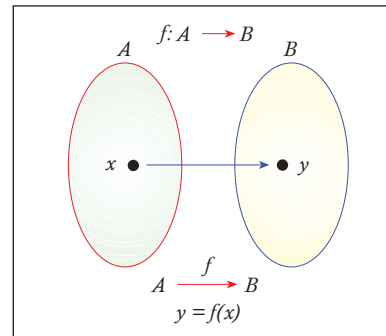


Fig. 1.5 Notaciones empleadas para representar una función.

A menudo, una función se representa mediante las expresiones:

$$f: A \rightarrow B \quad A \xrightarrow{f} B \quad (1.2)$$

que se leen como "función de A en B ". Otro tipo de notación usada con frecuencia es:

$$y = f(x) \quad (1.3)$$

que se lee como " y es una función de x " y f significa las operaciones que han de efectuarse sobre un elemento cualquiera, x , del conjunto A para obtener su imagen, y , en el conjunto B . Así, si la expresión de la función $y = f(x)$ es:

$$y = f(x) = x^2 \quad (1.4)$$

se está estableciendo que todos los elementos del conjunto A deben ser elevados al cuadrado para ob-

tener las imágenes correspondientes en el conjunto B . De la misma forma, la función:

$$y = f(x) = x + 3 \quad (1.5)$$

nos dice que a cada elemento, x , del conjunto A debe sumársele 3 para determinar las imágenes correspondientes, y , en el conjunto B . Por ejemplo, para los elementos $x = 2$ y $x = 7$ del conjunto A , se obtendrán las siguientes imágenes en el conjunto B :

$$y = f(2) = 2 + 3 = 5 \quad y = f(7) = 7 + 3 = 10$$

Observa que las imágenes de x se obtienen sustituyendo x por el valor dado.

EJEMPLO 1.3

Indica cuál de las relaciones de la fig. 1.6 son funciones. Justifica tu respuesta.

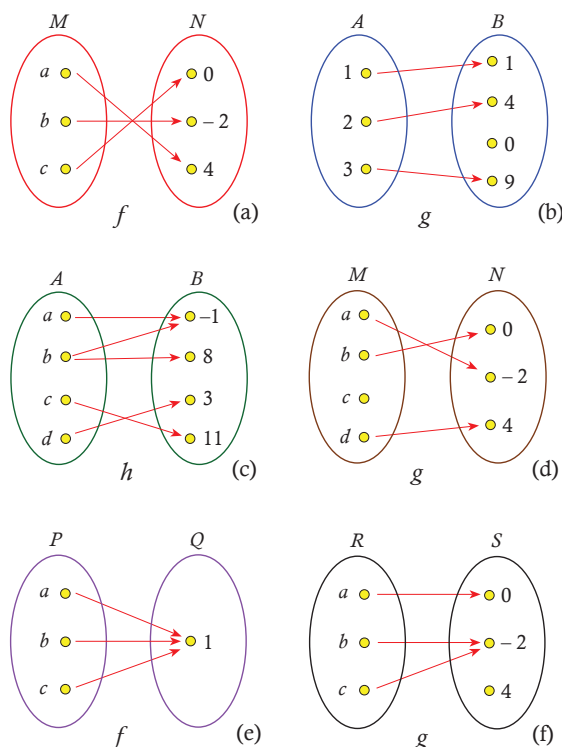


Fig. 1.6 ¿Son las relaciones mostradas funciones?
Ejemplo 1.3.

Solución

a) La relación f es una función porque todos los elementos del conjunto de partida, M , tienen una imagen en el conjunto N de llegada. Si escribimos la relación mediante pares ordenados, tendremos:

$$f = \{(a, 4), (b, -2), (c, 0)\}$$

donde ningún primer componente, a, b, c , aparece dos veces.

b) A pesar de que el elemento 0 del conjunto de llegada no está relacionado con ningún elemento del conjunto de partida, la relación g es una función, ya que todos los elementos de A tienen una sola imagen en B . Podemos escribir:

$$g = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$$

donde ningún primer componente aparece dos veces.

c) La relación h no es una función porque el elemento b del conjunto de partida tiene dos imágenes, -1 y 8 , en el conjunto de llegada. Usando pares ordenados tendremos:

$$h = \{(a, -1), (b, -1), (b, 8), (c, 11), (d, 3)\}$$

donde b aparece dos veces como primer componente.

d) La relación g no es una función porque el componente c del conjunto M de partida no tiene imagen en el conjunto N de llegada.

e) Todos los elementos del conjunto P de partida tienen una imagen, 1 , en el conjunto Q de llegada y por tanto, la relación f es una función. Usando pares ordenados:

$$f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$$

donde ningún primer componente se repite.

f) La relación g es una función, ya que:

$$g = \{(a, 0), (b, -2), (c, -2)\}$$

donde ningún primer componente se repite.

EJEMPLO 1.4

Determina si las relaciones de la fig. 1.7 son funciones y establece su dominio y rango.

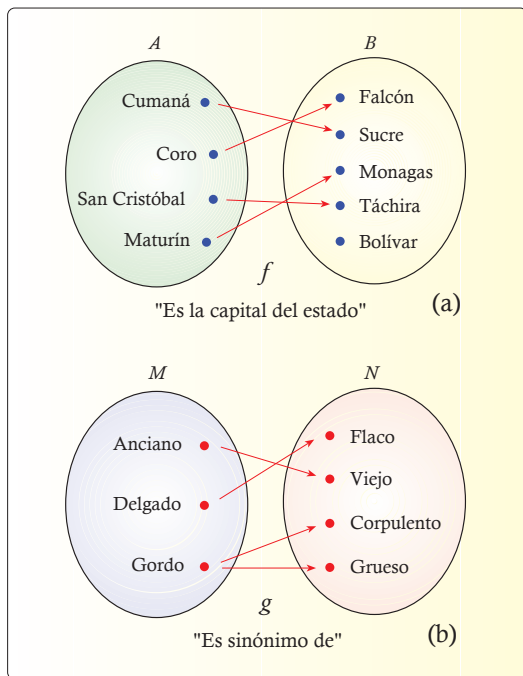


Fig. 1.7 ¿Son las relaciones funciones? Ejemplo 1.4.

Solución

La relación mostrada en la fig. 1.7(a) es una función ya que cada capital está asociada a su estado correspondiente. El dominio y el rango son:

$$D_f = \{\text{Cumaná, Coro, San Cristóbal, Maturín}\}$$

$$R_f = \{\text{Sucre, Falcón, Táchira, Monagas}\}$$

Como pares ordenados tenemos:

$$f = \{(\text{Cumaná, Sucre}), (\text{Coro, Falcón}), (\text{San Cristóbal, Táchira}), (\text{Maturín, Monagas})\}$$

La relación de la fig. 1.7(b) no es una función, ya que al elemento "Gordo" se le han asociado dos sinónimos, "Grueso" y "Corpulento", en el conjunto imagen. Para esta relación, se tiene:

$$\text{Dominio} = \{\text{Anciano, Delgado, Gordo}\}$$

$$\text{Rango} = \{\text{Viejo, Flaco, Grueso, Corpulento}\}$$

EJEMPLO 1.5

Dada la función:

$$y = f(x) = x + 3$$

determina su imagen para $x = 2$, $x = -4$ y $x = 0$.

Solución

Para hallar la imagen o valor de la función para $x = 2, -4, 0$, se sustituye cada una de estas cantidades en la expresión de $f(x)$. Así tenemos:

$$x = 2 \quad y = f(2) = 2 + 3 = 5$$

$$x = -4 \quad y = f(-4) = -4 + 3 = -1$$

$$x = 0 \quad y = f(0) = 0 + 3 = 3$$

Un diagrama sagital con los elementos $x = 2, -4, 0$ se muestra en la fig. 1.8. La función y puede también expresarse, para $x = 2, x = -4$ y $x = 0$ como:

$$y = \{(2, 5), (-4, -1), (0, 3)\}$$

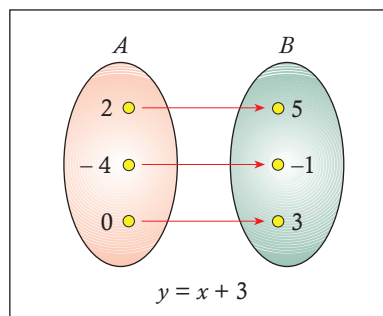


Fig. 1.8 Diagrama sagital para la función $y = x + 3$ para $x = 2, x = -4$ y $x = 0$. Ejemplo 1.4.

EJEMPLO 1.6

Dada la función:

$$f(x) = x^2 - 3 \quad x \in \mathbb{N}$$

Determina el conjunto imagen para $x = 1, 2, 5$.

Solución

$$x = 1 \quad f(1) = 1^2 - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$x = 2 \quad f(2) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$x = 5 \quad f(5) = 5^2 - 3 = 25 - 3 = 22$$

El diagrama sagital se muestra en la fig. 1.9.

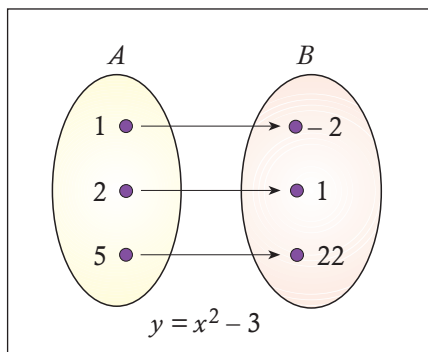
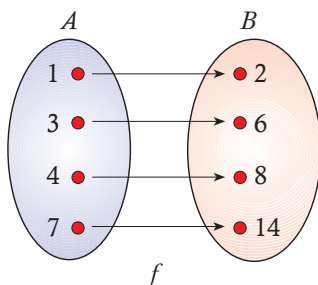


Fig. 1.9 Diagrama sagital para el ejemplo 1.6.

EJEMPLO 1.7

Se tiene una función cuyo dominio y rango están dados por el diagrama sagital de la fig. 1.10. Determina la ley de correspondencia que se aplica.

Fig. 1.10 ¿Cuál es la ley de correspondencia, si se conocen el dominio y el rango de f ? Ejemplo 1.7.**Solución**

De la fig. 1.10, puedes observar que los elementos del conjunto imagen, B , se forman multiplicando por 2 los elementos del conjunto de partida, A . Por tanto, la ley de correspondencia es:

$$y = f(x) = 2x$$

EJEMPLO 1.8

Determina la ley de correspondencia para la función cuyo dominio y rango son:

$$D_f = \{6, 3, 1, -1\} \quad R_f = \{5, 2, 0, -2\}$$

Solución

Si analizas con atención el dominio y el rango de la función, encontrarás que los elementos del rango, se forman restando 1 a los elementos del dominio. Así tenemos:

Elemento del dominio - 1	Elemento del rango
$6 - 1$	5
$3 - 1$	2
$1 - 1$	0
$-1 - 1$	-2

Luego, la ley de correspondencia es:

$$f(x) = x - 1$$

EJEMPLO 1.9

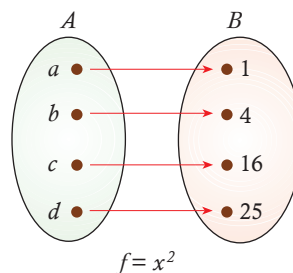
Una función tiene la ley de correspondencia:

$$y = f(x) = x^2$$

Si el rango de la función es $R_f = \{1, 4, 16, 25\}$, ¿cuál es el dominio de la misma?

Solución

La fig. 1.11 muestra el diagrama sagital de la función.

Fig. 1.11 Conocida la ley de correspondencia, $y = x^2$, y la imagen de la función, ¿cuál es el dominio? Ejemplo 1.9.

Como cada elemento imagen se forma elevando al cuadrado los elementos correspondientes del dominio, para hallar estos últimos es necesario obtener la raíz cuadrada de los elementos del conjunto imagen. Así se obtiene:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{1} & b &= \sqrt{4} = 2 \\ c &= \sqrt{16} = 4 & d &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

El dominio de la función es, por tanto:

$$D_f = \{1, 2, 4, 5\}$$

EJEMPLO 1.10

Una función tiene la ley de correspondencia:

$$y = f(x) = x + 2$$

Si el rango de la función es $R_f = \{3, -4, 0, 1\}$, determina D_f .

Solución

La fig. 1.12 muestra el diagrama sagital. Como cada elemento imagen se forma sumando 2 a los elementos correspondientes del dominio, para obtener estos últimos se debe restar 2 a cada uno de los elementos del rango.

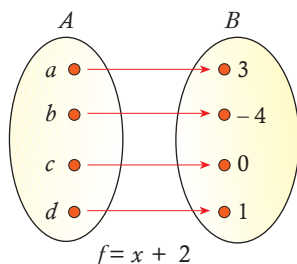


Fig. 1.13 Diagramas sagitales para el ejemplo 1.11.

De esta manera escribimos:

$$\begin{aligned} y = 3 & & x = 3 - 2 = 1 \\ y = -4 & & x = -4 - 2 = -6 \\ y = 0 & & x = 0 - 2 = -2 \\ y = 1 & & x = 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

Luego,

$$D_f = \{1, -6, -2, -1\}$$

EJEMPLO 1.11

Si los conjuntos de partida y las funciones son:

$$\text{a) } A = \{-1, 2, 3\} \quad y = 3^x$$

$$\text{b) } A = \{100, -150, 13\} \quad y = 2x^0$$

determina los correspondientes conjuntos de llegada. Dibuja los diagramas sagitales.

Solución

$$\text{a) Para } x = -1 \quad y = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Para } x = 2 \quad y = 3^2 = 9$$

$$\text{Para } x = 3 \quad y = 3^3 = 27$$

Luego,

$$B = \left\{ \frac{1}{3}, 9, 27 \right\}$$

$$\text{b) Para } x = 100 \quad y = 2 \cdot (100)^0 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{Para } x = -150 \quad y = 2 \cdot (-150)^0 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{Para } x = 13 \quad y = 2 \cdot (13)^0 = 2 \cdot 1 = 2$$

Luego,

$$B = \{2\}$$

La fig. 1.13 muestra los diagramas sagitales.

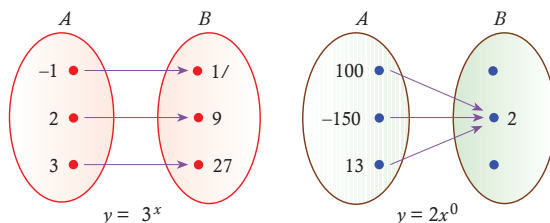


Fig. 1.13 Diagramas sagitales para el ejemplo 1.11.

EJEMPLO 1.12

Determina si la ley de correspondencia "es menor que" aplicada a los conjuntos:

$$A = \{2, 5, 7, 10\} \quad B = \{1, 3, 4, 6\}$$

genera una función.

Solución

El diagrama sagital correspondiente a esta relación se muestra en la fig. 1.14. Evidentemente la relación dada no es una función porque hay elementos en A que no tienen imagen en B. Además, el elemento 2 del conjunto de partida tiene 3 imágenes en el conjunto de llegada.

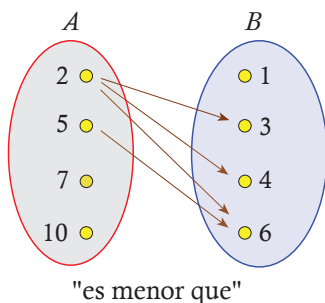


Fig. 1.14 ¿Genera la ley de correspondencia "es menor que" una función? Ejemplo 1.12.

**EJERCICIOS**

1.4 Indica cuáles de las relaciones de la fig. 1.15 son funciones. Justifica tu respuesta. En todos los casos establece el dominio y el rango de la relación.

1.5 Determina si las relaciones mostradas en la fig. 1.16 son funciones y establece en cada caso el dominio y el rango.

1.6 Dadas las funciones:

$$\begin{array}{lll} a) y = x - 5 & b) y = \frac{4}{x} + 2 & c) y = x^2 \\ d) y = 2^x - 1 & e) y = 3x^0 & f) y = \frac{2}{x^0} \end{array}$$

determina la imagen de cada una de ellas cuando $x = 1, -1$ y 2 .

1.7 Dadas las funciones y los conjuntos de partida, determina el conjunto imagen.

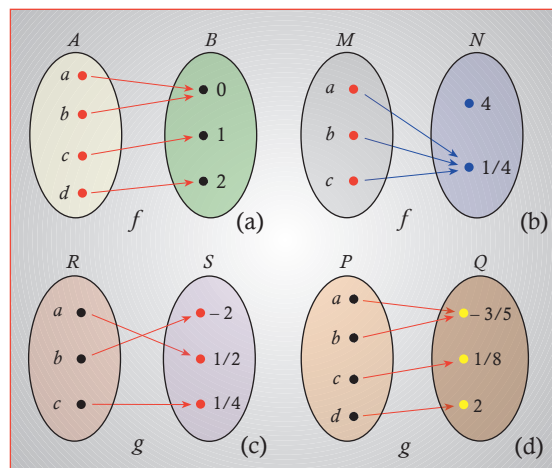


Fig. 1.15 ¿Cuáles relaciones son funciones? Ejercicio 1.4.

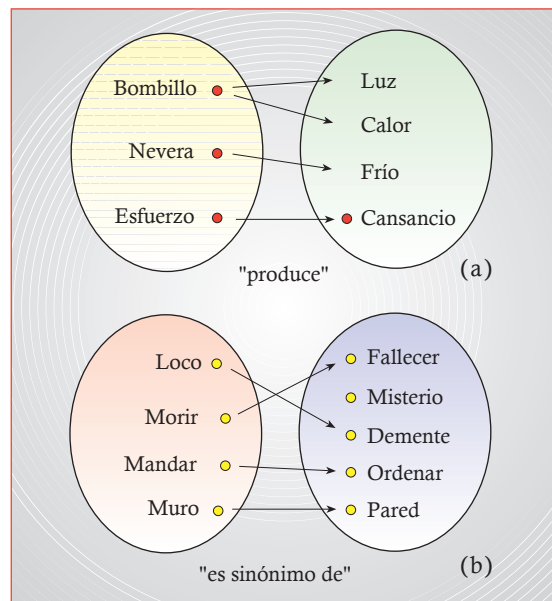


Fig. 1.16 ¿Son funciones las relaciones mostradas? Ejercicio 1.5.

$$\begin{array}{ll} a) f = 1 + x & A = \{0, -1, 4, -4\} \\ b) f = 2x - 2 & A = \{1, 3, -1, -3\} \\ c) y = x^3 + 3 & A = \{0, 1, 2, 3\} \\ d) y = \frac{x}{2} - 2 & A = \{-1, -2, -3\} \\ e) y = \frac{5}{9}(x - 32) & A = \{56, 72, 84\} \end{array}$$

1.8 Dados los diagramas sagitales de la fig. 1.17, determina la ley de correspondencia que se aplica en cada caso.

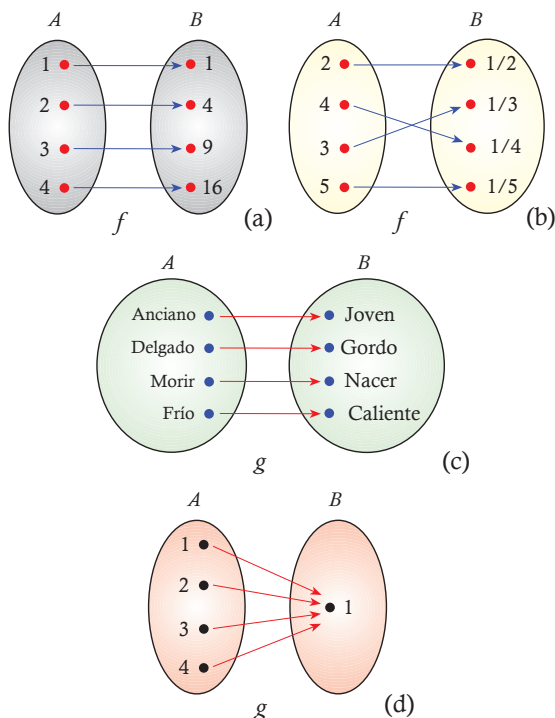


Fig. 1.17 Dados los conjuntos de partida y de llegada, determina la ley de correspondencia. Ejercicio 1.8.

1.9 Para los diagramas sagitales de la fig. 1.18, determina el dominio de la función. 1.3

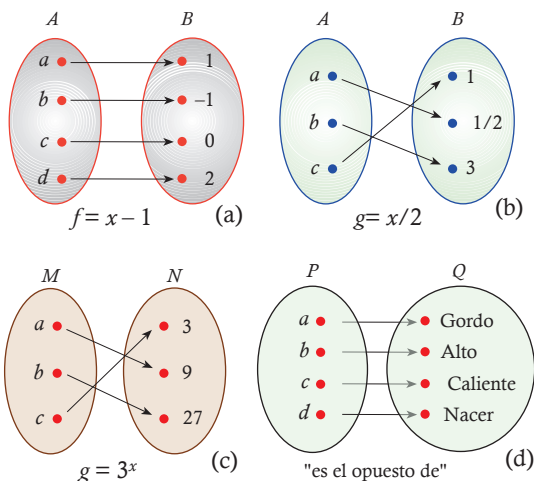


Fig. 1.18 Conocida la ley de correspondencia y la imagen de la función, determina el dominio de la misma. Ejercicio 1.9.

1.3 FUNCIONES BIYECTIVAS

Una función biyectiva es aquella que cumple con las siguientes condiciones:

1. Cada elemento del conjunto de llegada es imagen de algún elemento del conjunto de partida.
2. Cada elemento del conjunto de llegada es imagen de un solo elemento del conjunto de partida.

En la fig. 1.19 se muestra una función biyectiva y otra no biyectiva. Mientras que la fig. 1.19(a) cumple con las características mencionadas arriba, la fig. 1.19(b) no llena esas condiciones, ya que el elemento 2 del conjunto de llegada es imagen de todos los elementos del conjunto de partida.

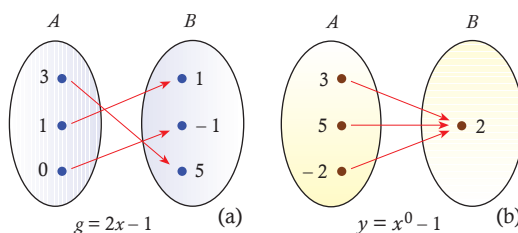


Fig. 1.19 (a) Función biyectiva. (b) Función no biyectiva.

EJEMPLO 1.13

La función valor absoluto se define como $y = |x|$. Investiga, asignando valores enteros a x , si la función es biyectiva.

Solución

Tomemos los valores de x iguales a 3, -3, 1 y -1. Podemos escribir:

$$\begin{array}{ll} x = 3 & |3| = 3 \\ x = -3 & |-3| = 3 \\ x = 1 & |1| = 1 \\ x = -1 & |-1| = 1 \end{array}$$

En la fig. 1.20 aparece el diagrama sagital con los valores anteriores. Se puede ver que los elementos 3 y -3 tienen la misma imagen. Esto nos indica que la función $y = |x|$ no es biyectiva, ya que no

cumple con la segunda condición de la definición dada de función biyectiva.

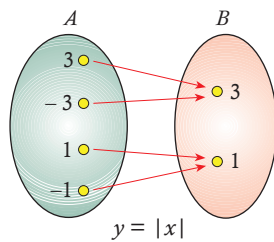


Fig. 1.20 La función $y = |x|$ no es una función biyectiva. Ejemplo 1.13.



EJERCICIOS

1.10 Di cuáles funciones de la fig. 1.21 son biyectivas.

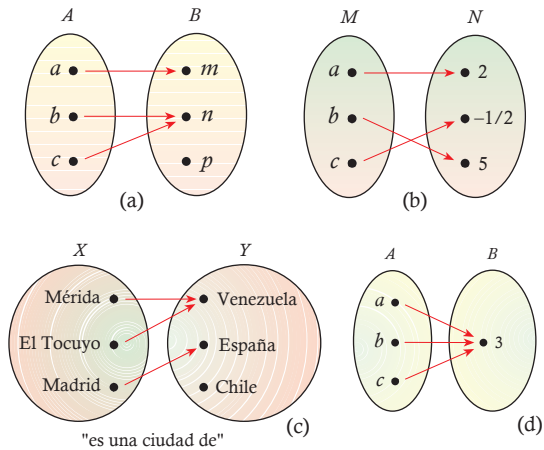


Fig. 1.20 La función $y = |x|$ no es una función biyectiva. Ejemplo 1.13.

2

OPERACIONES EN $\mathbb{Z}$ 2.1 EL CONJUNTO $\mathbb{Z}$ DE LOS NÚMEROS ENTEROS

El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros está dado por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (2.1)$$

A los números naturales $1, 2, 3, \dots$, cuando se les precede con el signo menos ($-$), se les conoce como **números negativos**.

El conjunto de los números enteros puede ser representado sobre una recta que incluya a los números naturales y a los números negativos. Esto se muestra en la fig. 2.1. Para cada número positivo, representado por un punto a la derecha del origen (0), existe un número negativo. Así, si seleccionamos el número positivo 2 , encontraremos un número negativo -2 , ambos situados a la misma distancia del origen 0 . A los números situados a igual distancia del origen se les conoce con el nombre de **números opuestos**. Así, el opuesto de 2 es -2 y el opuesto de -5 es $+5$.

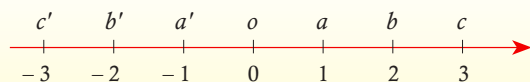


Fig. 2.1 La recta numérica como una función biyectiva.

En la práctica, los números enteros se utilizan para indicar situaciones diametralmente opuestas. Así, las situaciones de ganancia o pérdida de Bs. 100 pueden ser representadas por $+100$ y -100 , respectivamente. La representación numérica de los números enteros puede transformarse en una función biyectiva si asociamos a cada número entero una letra, tal como aparece en la fig. 2.1. A cada elemento del

conjunto $A = \{\dots, c', b', a', o, a, b, c, \dots\}$ corresponde sólo un elemento en el conjunto imagen $B = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. El diagrama sagital para esta función se muestra en la fig. 2.2.

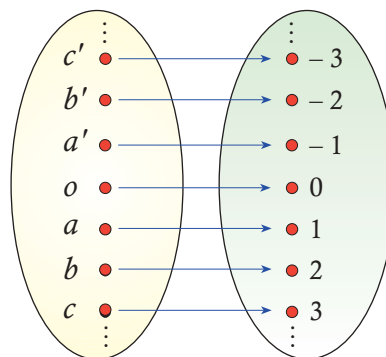


Fig. 2.2 Diagrama sagital para la recta numérica como función biyectiva.

EJEMPLO 2.1

Dibuja sobre la recta numérica los números pertenecientes al siguiente subconjunto de $\mathbb{Z}$:

$$A = \{-5, -3, 0, 4\}$$

Solución

La fig. 2.3 muestra los elementos de A representados sobre la recta numérica.

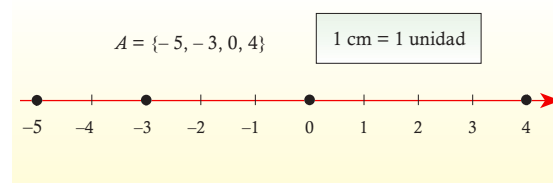


Fig. 2.3 Representación del conjunto $A = \{-5, -3, 0, 4\}$ sobre la recta numérica.



Dibuja los elementos de los siguientes conjuntos sobre la recta numérica:

$$2.1 \quad A = \{-3, -1, 2, 6\}$$

$$2.2 \quad B = \{-9, -6, 1, 4\}$$

$$2.3 \quad M = \{-12, -6, -3, 0, 9\}$$

$$2.4 \quad N = \{-60, -40, 0, 20, 80\}$$

2.2 SUBCONJUNTOS NOTABLES DE $\mathbb{Z}$

Dentro del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros podemos distinguir los siguientes **subconjuntos notables**:

1. El subconjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$: comprende a los elementos del conjunto $\mathbb{N}^*$.

Es decir:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \quad (2.2)$$

2. El subconjunto de los enteros negativos, $\mathbb{Z}^-$: comprende a los números enteros negativos (no incluye al 0):

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -4, -3, -2, -1\} \quad (2.3)$$

3. El subconjunto de los números enteros distintos de cero, $\mathbb{Z}^*$: comprende a los enteros positivos, a los enteros negativos y excluye al cero:

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\} \quad (2.4)$$

Es importante hacer notar que los números negativos deben estar siempre precedidos del

signo menos. En los números enteros positivos es opcional usar el signo $+$ para precederlos. Así, podemos escribir:

Número negativo 4: -4

Número positivo 7: $+7$ o, simplemente, 7

4. El subconjunto $\{0\}$: contiene únicamente al número 0 del conjunto $\mathbb{Z}$. El número 0 no es ni positivo ni negativo.

2.3 LA ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Podemos distinguir los siguientes casos:

1. **Adición de enteros con signos positivos:** se suman los enteros y se le coloca el signo positivo al resultado.

Ejemplo: $3 + 4 = +7 = 7$

2. **Adición de enteros con signos negativos:** se determinan los valores absolutos de los números, se suman esos valores absolutos y al resultado se le coloca el signo negativo.

Tomemos la operación dada por $-3 - 4$:

$$|-3| = 3 \quad |-4| = 4$$

$$3 + 4 = 7 \quad \text{Resultado} = -7$$

3. **Adición de enteros de distintos signos:** se determinan los valores absolutos de los números, se resta el de menor valor absoluto del que tiene mayor valor absoluto y al resultado se le coloca el signo del número de mayor valor absoluto.

A continuación, presentamos los siguientes ejemplos

$$\text{a) } 5 + (-3) \quad |5| = 5 \quad |-3| = 3$$

$$5 - 3 = 2 \quad \text{Resultado} = 2$$

$$\text{b) } -5 + 3 \quad |-5| = 5 \quad |3| = 3$$

$$5 - 3 = 2 \quad \text{Resultado} = -2$$

2.4 ELEMENTO NEUTRO DE LA ADICIÓN EN $\mathbb{Z}$

Al cero se le denomina elemento neutro de la adición en $\mathbb{Z}$. Si sumamos cero a cualquier número perteneciente a $\mathbb{Z}$ el resultado es el mismo número. Es decir, si x es un número en $\mathbb{Z}$, en general podemos escribir:

$$x + 0 = x \quad (2.5)$$

Así, por ejemplo:

$$-7 + 0 = -7 \quad 5 + 0 = 5 \quad 0 + (-11) = -11$$

2.5 ELEMENTO SIMÉTRICO U OPUESTO DE LA ADICIÓN EN $\mathbb{Z}$

Dado un elemento cualquiera, n , perteneciente al conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, siempre existe otro entero que sumado con él da cero como resultado. A este número se le conoce como el **elemento simétrico u opuesto** y se le designa por $-n$. Podemos, entonces, escribir:

1. Dado el entero 4, su simétrico es -4 , porque $4 + (-4) = 0$.
2. Dado el entero -5 , su simétrico es 5 , porque $-5 + 5 = 0$.
3. El simétrico de 0 es 0 , porque $0 + 0 = 0$.

Observa que si x es un número positivo, su opuesto o simétrico es un número negativo. Si, por el contrario, x es un número negativo, su opuesto o simétrico es un número positivo.

2.6 SUSTRACCIÓN DE DOS NÚMEROS ENTEROS

Dados dos números enteros, a y b , la sustracción de ambos, $a - b$, es un número entero que sumado con b nos da a . Así, por ejemplo:

$$\begin{array}{lll} 10 - 3 = 7 & \text{porque} & 7 + 3 = 10 \\ 5 - 1 = 4 & \text{porque} & 4 + 1 = 5 \end{array}$$

Es conveniente recordar aquí lo discutido en la

sección 2.5 sobre un número y su opuesto:

$$\begin{array}{ll} 1) + b & \text{El entero positivo } b \\ 2) - b & \text{El número simétrico u opuesto a } (+b) \\ 3) + (+b) & \text{El número no opuesto a } (+b) = b \\ 4) + (-b) & \text{El número no opuesto a } (-b) = -b \\ 5) - (+b) & \text{El número opuesto a } (+b) = -b \\ 6) - (-b) & \text{El número opuesto a } (-b) = +b \end{array} \quad (2.6)$$

De acuerdo con (4) de la relación (2.6), $(-b)$ puede ser reemplazado por $+(-b)$. Es decir, la diferencia $a - b$ se puede escribir como:

$$a - b = a + (-b) \quad (2.7)$$

cuya relación indica que:

La diferencia del entero a con el entero b , $a - b$, es igual a la suma de a con el opuesto de b .

2.7 MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Dados dos números enteros, a y b , el resultado de la multiplicación de los mismos es también un número entero y se representa por $a \cdot b$. En el conjunto $\mathbb{Z}$ podemos distinguir tres casos:

1. **Los números enteros son positivos:** el resultado de la multiplicación de los números positivos a y b es también un número positivo c :

$$a \cdot b = c \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (2.8)$$

Así, tenemos:

$$3 \cdot 4 = 12 \quad 5 \cdot 4 = 20$$

2. **El primer factor es positivo y el segundo es negativo.**

Llamemos al primer factor a y al segundo factor $-b$. Se puede escribir:

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b) \quad (2.9)$$

La relación anterior nos dice que al multiplicar un número positivo (a) por un número negativo ($-b$), resulta un número negativo. Ejemplos de la aplicación de la relación (2.9) son:

$$4 \cdot (-3) = -12 \quad 5 \cdot (-2) = -10$$

$$10 \cdot (-20) = -200 \quad 15 \cdot (-5) = -75$$

3. El primer factor es negativo y el segundo también.

Si $-a$ y $-b$ son el primer y el segundo factor podemos escribir:

$$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b) \quad (2.10)$$

cuya relación establece que al multiplicar dos números negativos, el resultado es un número positivo. Ejemplos de aplicación de la relación (2.10) son:

$$(-4) \cdot (-5) = 20 \quad (-2) \cdot (-9) = 18$$

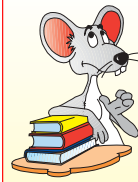
$$(-1) \cdot (-1) = 1 \quad (-7) \cdot (-1) = 7$$

2.8 REGLA DE LOS SIGNOS

De acuerdo a lo estudiado en la sección anterior, podemos resumir en la tabla de la fig. 2.4 la llamada *regla de los signos* que nos permite determinar rápidamente el signo del producto de dos números enteros.

(MÁS) • (MÁS) = MÁS	(+) • (+) = +
(MÁS) • (MENOS) = MENOS	(+) • (-) = -
(MENOS) • (MÁS) = MENOS	(-) • (+) = -
(MENOS) • (MENOS) = MÁS	(-) • (-) = +

Fig. 2.4 Regla de los signos.



EJERCICIOS



2.5 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $-32 + [18 - 4 + (5 - 11)] + 80$

b) $7 + \{-25 + [(16 + 10) - 12 + 20]\} - 12$

c) $[8 + (3 - 9) + (6 - 7)] + \{15 - [13 - (7 - 22)]\}$

d) $-[17 + (6 - 13)] + [26 - 42 + (7 + 30)]$

e) $5 + \{-4 + 3 + (9 - 6) - [6 - 5 - (18 - 12)]\} +$
 $- (4 - 12) + 1$

f) $30 + 40 - (50 + 10) - [60 + (100 - 150)] - 80$

2.6 Determina el valor de las siguientes expresiones y muestra el resultado sobre la recta numérica:

a) $4 - (+8)$ b) $-7 - (+11)$

c) $18 - (-41)$ d) $100 - 68$

e) $5 - (+6)$ f) $0 - (-5)$

g) $3 - (-1)$ h) $6 - (0)$

i) $-7 - (-3)$

2.7 Determina el número entero que debe ir en el espacio en blanco:

a) $-12 = -3 \cdot ()$ f) $-18 = (9) \cdot ()$

b) $-12 = 4 \cdot ()$ g) $+60 = (-15) \cdot ()$

c) $-(-30) = 3 \cdot ()$ h) $39 = () \cdot (-13)$

d) $18 = 9 \cdot ()$ i) $-42 = (-14) \cdot ()$

e) $18 = -9 \cdot ()$ j) $75 = () \cdot (-3)$

2.8 Determina el valor de x en las ecuaciones:

- a) $5 \cdot x = -5$ d) $-5 \cdot (-x) = +5$
 b) $-5 \cdot x = 5$ e) $-5 \cdot (-x) = -5$
 c) $5 \cdot x = 5$ f) $1 \cdot (x) = -1$

2.9 Efectúa las siguientes operaciones. Usa la propiedad distributiva.

- a) $5 \cdot (1 - 8) + 3 \cdot (4 - 3) - 10 \cdot (7 - 3)$
 b) $(10 - 5 + 1) \cdot (7 + 3 - 6) + 12$
 c) $-19 + [12 - (5 + 3) \cdot (-1)] - 8 \cdot (-3)$
 d) $9 \cdot (2 - 3) \cdot (4 + 1) + (3 - 4) \cdot (-2 - 3)$
 e) $-2 - 2 \cdot (4 - 6) \cdot (-1) + 5 \cdot [-1 \cdot (6 - 7) + 10 \cdot (-11)]$
 f) $\{-3 + [8 + (-6 - 1)] - [4 - (7 - 9)]\} + 5 \cdot (6 - 3) - 18$

2.9 EL ELEMENTO NEUTRO DE LA MULTIPLICACIÓN

Al número 1 se le conoce con el nombre de **elemento neutro** de la multiplicación, ya que al multiplicar un entero cualquiera por 1, el resultado es el mismo entero. Como ejemplos, podemos citar:

$$\begin{array}{ll} 4 \cdot 1 = 4 & (-3) \cdot 1 = -3 \\ a \cdot 1 = a & 1 \cdot (-100) = -100 \end{array}$$

2.10 MULTIPLICACIÓN POR CERO

Al multiplicar cualquier número por cero el resultado es cero.

Como ejemplos, podemos escribir:

$$\begin{array}{ll} 7 \cdot 0 = 0 & 0 \cdot 100 = 0 \\ 20 \cdot 0 = 0 & 0 \cdot (-40) = 0 \end{array}$$

2.11 ECUACIONES EN Z. PROBLEMAS CON ECUACIONES EN Z.

Ecuaciones en $\mathbf{Z}$ son aquellas cuyas soluciones pertenecen al conjunto de los números enteros. Las siguientes reglas facilitan la solución de tales ecuaciones en $\mathbf{Z}$:

1. Si a los dos miembros de una ecuación se le suman o se le restan cantidades iguales, la solución de la ecuación no se altera.
2. Si los miembros de una ecuación se multiplican o se dividen por una misma cantidad, el resultado no se altera.
3. Si los signos de todos los términos de una ecuación se cambian, la solución no se altera.

Las reglas anteriores permiten transponer términos de un miembro a otro en una ecuación sin que la solución se altere. Basados en esas reglas podemos establecer:

1. *Cualquier término de una ecuación puede ser trasladado (transpuesto) de un miembro a otro si se le cambia de signo.*
2. *Si la cantidad (coeficiente) que acompaña a la incógnita está multiplicando, puede pasarse al segundo miembro dividiendo a lo que allí figura.*
3. *Si la cantidad (coeficiente) que acompaña a la incógnita la está dividiendo, puede pasarse al segundo miembro multiplicando a lo que allí figura.*

Según lo anterior, se puede utilizar el siguiente procedimiento para resolver una ecuación:

- a) *Aislar en un miembro de la ecuación al término que contiene a la incógnita. Para ello deben pasarse al otro miembro los términos que no contengan a la incógnita. Los términos que estén precedidos con signos positivos pasarán al otro miembro con signos*

negativos. Los términos que estén precedidos con signos negativos pasarán al otro miembro con signos positivos.

b) Pasar al otro miembro el coeficiente de la incógnita. Si el coeficiente está multiplicando a la incógnita, pasa dividiendo, y si está dividiendo, pasa multiplicando.

Existen situaciones de la vida diaria que pueden expresarse mediante ecuaciones, cuya solución pertenece al conjunto **Z** de los números enteros. Como ya sabes la forma de resolver las ecuaciones, es conveniente que aprendas a expresar algunos problemas en forma de ecuación. La tabla siguiente te ayudará a tal fin. Allí se muestra cómo se representan los múltiplos de un número, los números pares e impares y los números consecutivos y también se dan ciertas relaciones comunes entre dos números.

Cantidad desconocida e incógnita: x

Duplo de una cantidad desconocida: $2x$

Triplo de una cantidad desconocida: $3x$

Cuádruplo de una cantidad desconocida: $4x$

Número par: $2x$

Número impar: $2x + 1$

Dos números consecutivos: $x, x + 1$

Dos números pares consecutivos: $2x, 2x + 2$

Dos números impares consecutivos: $2x + 1, 2x + 3$

Un número excede a otro en 5 unidades o un número aumentado en 5:

1er. número: x

2do. número: $x + 5$

Un número es menor que otro en 5 unidades o un número disminuido en 5:

1er. número: x

2do. número: $x - 5$

EJEMPLO 2.2

La suma de un número, su duplo y su triplo es igual a 72. Determina el número.

Solución

Número desconocido: x

Duplo del número desconocido: $2x$

Triplo del número desconocido: $3x$

Suma del número, su duplo y su triplo: $x + 2x + 3x$

La suma anterior es igual a 72, por lo tanto:

$$x + 2x + 3x = 72 \Rightarrow 6x = 72 \Rightarrow x = \frac{72}{6} = 12$$

EJEMPLO 2.3

La suma de dos números consecutivos es 43. Determina los dos números.

Solución

Primer número: x

Segundo número: $x + 1$

La suma de los dos números: $x + x + 1$

Como su suma es igual a 43, podemos escribir:

$$x + x + 1 = 43 \Rightarrow 2x + 1 = 43$$

$$2x = 43 - 1 \Rightarrow 2x = 42 \Rightarrow x = \frac{42}{2} = 21$$

Luego tenemos:

Primer número: 21

Segundo número: $21 + 1 = 22$

EJEMPLO 2.4

La suma de dos números impares consecutivos es 36. Determina los dos números.

Solución

Primer número: $2x + 1$

Segundo número: $2x + 3$

Suma de los dos números: $2x + 1 + 2x + 3 = 36$

Resolviendo la ecuación, tenemos:

$$2x + 2x + 4 = 36 \Rightarrow 4x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{4} = 8$$

Entonces:

$$\text{Primer número: } 2x + 1 = 2 \cdot 8 + 1 = 17$$

$$\text{Segundo número: } 2x + 3 = 2 \cdot 8 + 3 = 19$$

EJEMPLO 2.5

La edad de Irene es el doble de la edad de Ernesto y la suma de sus edades es 27. Determina ambas edades.

Solución

$$\text{Edad de Ernesto: } y$$

$$\text{Edad de Irene (doble de la de Ernesto): } 2y$$

$$\text{Suma de ambas edades: } y + 2y$$

Luego:

$$y + 2y = 27 \Rightarrow 3y = 27 \Rightarrow y = \frac{27}{3} = 9$$

Podemos entonces escribir:

$$\text{Edad de Ernesto: } 9 \text{ años}$$

$$\text{Edad de Irene: } 2 \cdot 9 = 18 \text{ años}$$

EJEMPLO 2.6

Héctor tiene actualmente el doble de la edad de su hijo Ramón. Dentro de cinco años, la suma de sus edades será 70 años. ¿Qué edad tienen actualmente?

Solución

$$\text{Edad actual de Ramón: } x$$

$$\text{Edad actual de Héctor: } 2x$$

$$\text{Edad de Ramón dentro de cinco años: } x + 5$$

$$\text{Edad de Héctor dentro de cinco años: } 2x + 5$$

$$\text{Suma de edades de Ramón y Héctor dentro de 5 años: } x + 5 + 2x + 5$$

Luego:

$$3x + 10 = 70 \Rightarrow 3x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{3} = 20$$

Podemos escribir, entonces:

$$\text{Edad actual de Ramón: } 20 \text{ años}$$

$$\text{Edad actual de Héctor: } 20 \cdot 2 = 40 \text{ años}$$

EJEMPLO 2.7

A un número se le multiplica por 2 y se le suma 10 y el resultado es -12 . ¿Cuál es ese número?

Solución

$$\text{Número: } x$$

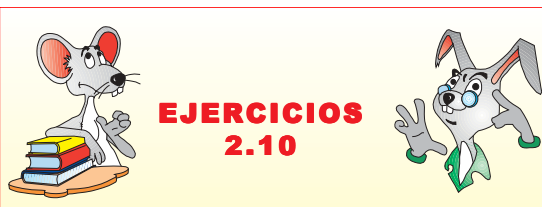
$$\text{Se le multiplica por 2: } 2x$$

$$\text{Se le suma 10: } 2x + 10$$

$$\text{El resultado es } -12: 2x + 10 = -12$$

Resolviendo la ecuación:

$$2x + 10 = -12 \Rightarrow 2x = -22 \Rightarrow x = \frac{-22}{2} = -11$$



EJERCICIOS 2.10

1. La suma de un número con su duplo es 39. Determina el número.

2. La suma de un número y su triplo es 44. Determina el número.

3. La suma de un número, su duplo y su triplo es 90. Determina dicho número.

4. La suma de dos números consecutivos es 69. Determina los números.

5. La suma de dos números pares consecutivos es 146. Determina los dos números.

6. La suma de dos números impares consecutivos es 92. Determina los dos números.

7. La suma de un número más 12, es igual a tres veces dicho número. ¿Cuál es el número?

8. Un número excede a otro en 3. Encuentra los dos números si su suma es 47.

9. Un número excede en cuatro a otro número entero y su suma es 250. ¿Cuáles son los números?

10. La diferencia de dos números es 67. Uno de los números es el doble del otro. Determinalos.

11. La diferencia de dos números es 84 y uno de ellos es el triple del otro. Encuentra los números.

12. Un número es el triplo de otro. Si se añade 5 al menor y el resultado se suma al mayor, se obtiene 9 más el número mayor. Determina los números.

13. Divide al número 84 en dos partes de tal manera que una sea el doble de la otra.

14. Luis tiene 26 años más que Pedro. Si la suma de sus edades es 60 años, ¿qué edad tiene cada uno?

15. Antonio es 6 años más joven que su hermana Irene. Si la suma de sus edades es 34 años, ¿qué edades tienen?

16. Pedro tiene el doble de la edad de su hijo. Dentro de tres años la suma de sus edades será 75 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

17. El padre de Héctor tiene 5 años más que el triple de la edad de su hijo. Hace cuatro años la suma de sus edades era 45 años. ¿Cuál es la edad de ambos?

18. En un salón de clase hay 31 estudiantes. Si el número de hembras excede en 5 al número de varones, determina cuántos varones y cuántas hembras hay en el salón.

19. Se van a repartir 150 bolívares entre tres personas. Si al segundo se le da el doble del primero y al tercero el triple del primero, determina cuánto le toca a cada uno.

20. La moto de Luis costó la tercera parte de la moto de Alfredo. Si la diferencia de costo entre ambos vehículos fue de Bs. 2.000.000. ¿cuánto costó cada moto?

21. A un número se le multiplica por 3 y se le suma 8 y el resultado es -7 . ¿Cuál es el número?

3

OPERACIONES EN Q

3.1 EL CONJUNTO F DE LAS FRACCIONES

Una fracción es un número que puede ser representado en la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b pertenecen al conjunto $\mathbf{Z}$ ($a, b, \in \mathbf{Z}$) y $b \neq 0$.

De la definición anterior, se puede deducir que una fracción es el cociente indicado de dos números enteros donde al dividendo, a , se le conoce como *numerador* y al divisor, b , se le conoce como *denominador*.

Geométricamente una fracción puede representarse mediante la división de una línea, una superficie o un volumen en varias partes. Así, si un rectángulo se divide en seis partes iguales, cada una de las partes corresponde a $1/6$ de la superficie total del rectángulo y 3 partes del mismo corresponderán a $3/6$ del total.

3.2 EL CONJUNTO Q DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Tomemos la fracción irreducible $\frac{2}{3}$. Si amplificamos la fracción, obtenemos un número infinito de fracciones equivalentes. Al conjunto de todas las fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$ se le llama **número racional** y a la fracción irreducible, $\frac{2}{3}$, se le denomina **representante canónico** del número racional. Usualmente, al conjunto infinito de fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$ se le representa como:

$$\frac{2}{3} = \left\{ \dots, -\frac{8}{12}, -\frac{6}{9}, -\frac{4}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \dots \right\}$$

EJEMPLO 3.1

- a) Determina el número racional, cuyo representante canónico es $\frac{1}{5}$.
- b) ¿Cuál es el representante canónico del número racional $-\frac{15}{36}$?

Solución

- a) De acuerdo a lo estudiado, podemos escribir:

$$\frac{1}{5} = \left\{ \dots, -\frac{3}{15}, -\frac{2}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}, \dots \right\}$$

- b) Hallemos el M.C.D. de 15 y 36:

15	3	36	2	$15 = 3 \cdot 5$
5	5	18	2	$36 = 2^2 \cdot 3^2$
1		9	3	
		3	3	M.C.D. = 3
		1		

Dividiendo numerador y denominador entre 3:

$$-\frac{15 \div 3}{36 \div 3} = -\frac{5}{12}$$

Luego, podemos escribir:

$$-\frac{5}{12} = \left\{ \dots, -\frac{15}{36}, -\frac{10}{24}, -\frac{5}{12}, \frac{5}{12}, \frac{10}{24}, \frac{15}{36}, \dots \right\}$$

3.3 SUBCONJUNTOS NOTABLES DE Q

Entre los subconjuntos notables de $\mathbf{Q}$, podemos citar:

- a) **El conjunto $\mathbf{Z}$ de los números enteros.**

El conjunto $\mathbf{Z}$ de los enteros se expresa como:

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Ahora bien, dado que los números enteros pueden expresarse como una fracción con denominador unitario, la expresión anterior para $\mathbf{Z}$ puede escribirse:

$$\mathbf{Z} = \left\{ \dots, -\frac{5}{1}, -\frac{4}{1}, -\frac{3}{1}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, 0, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \dots \right\}$$

Lo que indica que $\mathbf{Z}$ está contenido en $\mathbf{Q}$ ($\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$).

- b) **El conjunto de los números racionales positivos, $\mathbf{Q}^+$.**

Como ejemplos, tenemos:
$$\left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9} \right\}$$

$$\left\{ \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15} \right\}$$

- c) **El conjunto de los números racionales negativos, $\mathbf{Q}^-$.**

Como ejemplos tenemos:
$$\left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{4}{6}, -\frac{6}{9} \right\}$$

$$\left\{ -\frac{3}{5}, -\frac{6}{10}, -\frac{9}{15} \right\}$$

- d) **El conjunto de los números racionales excluyendo al cero:**

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\}.$$

3.4 ADICIÓN DE FRACCIONES

- a) **Fracciones con iguales denominadores:** se conserva el mismo denominador y se suman los numeradores. Como ejemplos tenemos:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4} \quad \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

- b) **Fracciones con distintos denominadores:** se determinan fracciones equivalentes a las dadas con iguales denominadores y se procede como en el caso anterior.

EJEMPLO 3.2

Efectúa la siguiente operación:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

Solución

Primero hallamos el mínimo común denominador (m.c.d.):

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ & 2 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ & 2 \\ & 4 \\ & 2 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 = 2^1 \\ 4 = 2^2 \\ 16 = 2^4 \\ \text{m.c.d.} = 2^4 = 16 \end{array}$$

Las fracciones equivalentes son:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 8}{2 \cdot 8} = \frac{8}{16} \quad \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{4}{16} \quad \frac{1}{16} = \frac{1 \cdot 1}{16 \cdot 1} = \frac{1}{16}$$

Efectuando la adición:

$$S = \frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$$

EJEMPLO 3.3

Efectúa la adición:

$$S = 1 + \frac{-7}{8} + \frac{3}{24}$$

Solución

El m.c.d. entre 8 y 24 es 24. El número 1 puede escribirse como $\frac{24}{24}$. Luego:

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{-7}{8} + \frac{3}{24} = \frac{24}{24} + \frac{(-7) \cdot 3}{24} + \frac{3 \cdot 1}{24} = \\ &= \frac{24}{24} + \frac{-21}{24} + \frac{3}{24} = \frac{24 - 21 + 3}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



EJERCICIOS

3.1 Determina el número racional, cuyo representante canónico es $\frac{1}{3}$.

3.2 ¿Cuál es el representante canónico del número racional $\frac{18}{54}$?

3.3 Efectúa las operaciones siguientes y simplifica el resultado:

a) $\frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2}{6}$

b) $\frac{4}{3} + \frac{-5}{3} + \frac{-2}{3}$

c) $1 + \frac{5}{4} + \frac{-7}{4}$

3.4 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{2}{3} + \frac{7}{6}$

b) $\frac{-4}{7} + \frac{1}{21} + \frac{-3}{14}$

c) $-3 + \frac{-4}{12} + \frac{-9}{30}$

d) $3 + 2\frac{1}{5} + 4\frac{1}{20}$

e) $\frac{-3}{10} + \frac{-4}{9} + \frac{1}{15}$

f) $5 + \frac{1}{-16} - 3\frac{1}{4}$

3.5 SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

Para efectuar la sustracción de dos fracciones, se suma a una de ellas la opuesta de la otra. Así, por ejemplo:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{(-1)}{4} = \frac{3+(-1)}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5} + \frac{-1}{10} = \frac{2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1}{10} = \frac{4-1}{10} = \frac{3}{10}$$

3.6 OPERACIONES COMBINADAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

Para hallar el resultado, se determina el mínimo común denominador (m. c. d.) y se efectúan las operaciones de adición y sustracción que resulten.

EJEMPLO 3.4

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{8}{9} + \frac{13}{25} - \frac{11}{15}$

b) $-\frac{6}{12} + \frac{10}{9} - \frac{7}{24}$

Solución

a) El m.c.d. entre 9, 25 y 15 es 225 (compruébalo). Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{8}{9} + \frac{13}{25} - \frac{11}{15} &= \frac{8 \cdot 25 + 13 \cdot 9 - 11 \cdot 15}{225} = \\ &= \frac{200 + 117 - 165}{225} = \frac{152}{225} \end{aligned}$$

b) El m.c.d. entre 12, 9 y 24 es 72:

$$\begin{aligned} -\frac{6}{12} + \frac{10}{9} - \frac{7}{24} &= \frac{(-6) \cdot 6 + 10 \cdot 8 - 7 \cdot 3}{72} = \\ &= \frac{-36 + 80 - 21}{72} = \frac{23}{72} \end{aligned}$$

3.7 ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES CON SIGNOS DE AGRUPACIÓN

En este caso se procede de la manera siguiente:

a) Cuando un signo de agrupación esté precedido de signo positivo, se puede eliminar, dejando el mismo signo a las cantidades que se encuentren dentro de él.

b) Cuando un signo de agrupación esté

precedido de signo negativo, se puede eliminar cambiando el signo a las cantidades dentro de él.

- c) Cuando haya signos de agrupación incluidos dentro de otros, se comienza eliminando los signos más interiores.

EJEMPLO 3.5

Efectúa las operaciones indicadas:

$$\text{a)} \quad -\frac{3}{5} + \frac{7}{10} - \left[-\frac{2}{20} - \left(\frac{4}{10} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$\text{b)} \quad -2 - \left[\frac{5}{8} - \frac{3}{24} - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{16} \right) \right]$$

Solución

$$\text{a)} \quad S = -\frac{3}{5} + \frac{7}{10} - \left[-\frac{2}{20} - \left(\frac{4}{10} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$S = -\frac{3}{5} + \frac{7}{10} + \frac{2}{20} + \frac{4}{10} + \frac{1}{2}$$

Como el m.c.d. es 20, se tiene:

$$S = \frac{(-3) \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 10}{20} =$$

$$= \frac{-12 + 14 + 2 + 8 + 10}{20} = \frac{22}{20} = \frac{11}{10}$$

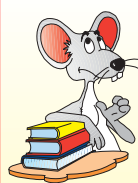
$$\text{b)} \quad S = -2 - \left[\frac{5}{8} - \frac{3}{24} - \frac{1}{3} - \frac{5}{16} \right]$$

$$S = -\frac{2}{1} - \frac{5}{8} + \frac{3}{24} + \frac{1}{3} + \frac{5}{16}$$

El m.c.d. es 48 y S nos queda como:

$$S = \frac{(-2) \cdot 48 + (-5) \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 16 + 5 \cdot 3}{48} =$$

$$= \frac{-96 - 30 + 6 + 16 + 15}{48} = -\frac{89}{48}$$



EJERCICIOS



3.5 Determina el resultado de las siguientes operaciones:

$$\text{a)} \quad \frac{3}{10} - \frac{1}{10}$$

$$\text{b)} \quad 2\frac{3}{6} - \frac{10}{6}$$

$$\text{c)} \quad -8\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$\text{d)} \quad -3\frac{2}{11} - \frac{8}{33}$$

$$\text{e)} \quad -\frac{3}{12} - \frac{5}{36}$$

$$\text{f)} \quad -2 - \frac{-3}{5}$$

3.6 Efectúa las operaciones indicadas:

$$\text{a)} \quad \frac{6}{3} + \frac{5}{10} - \frac{2}{16}$$

$$\text{b)} \quad \frac{1}{6} + \frac{3}{8} - \frac{7}{2}$$

$$\text{c)} \quad \frac{4}{3} - \frac{6}{8} - \frac{2}{40} + 1$$

$$\text{d)} \quad \frac{3}{40} - \frac{5}{10} + \frac{9}{20}$$

$$\text{e)} \quad 5 - \frac{4}{11}$$

$$\text{f)} \quad 5 - 4\frac{3}{4} + \frac{7}{12}$$

3.7 Efectúa las siguientes operaciones:

$$\text{a)} \quad \frac{11}{8} - \left[-\frac{1}{12} + \left(\frac{3}{6} - \frac{3}{4} \right) \right]$$

$$\text{b)} \quad -\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \right) - \left[-\frac{3}{8} + \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \right]$$

$$\text{c)} \quad -\frac{7}{8} + \frac{5}{88} + \left[\frac{9}{11} - \left(\frac{1}{22} + 1 \right) \right]$$

$$\text{d)} \quad \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{6} \right) + \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{5} \right)$$

3.8 MULTIPLICACIÓN DE DOS FRACCIONES

Dadas dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ la multiplicación de las mismas se define como:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (3.1)$$

Si se tienen varias fracciones, su multiplicación puede escribirse como:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} \dots = \frac{a \cdot c \cdot e \cdot g \dots}{b \cdot d \cdot f \cdot h \dots} \quad (3.2)$$

Así, por ejemplo:

$$\frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{3}{9}\right) = \frac{1 \cdot (-3)}{8 \cdot 9} = -\frac{3}{72} = -\frac{1}{24}$$

$$\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{(-2) \cdot (-4)}{7 \cdot 5} = \frac{8}{35}$$



EJERCICIOS

3.8 Efectúa las multiplicaciones siguientes:

a) $\frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ b) $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)$

c) $(-1) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{9}\right)$

3.9 Determina el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{6} + \frac{5}{12}\right) \cdot \frac{3}{4}$

b) $\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{10} - \frac{2}{15}\right) \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{4}{21}\right)$

c) $\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$

d) $-\left[\frac{1}{6} - \frac{4}{18} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)\right] + \frac{3}{2} - 2$

3.10 Determina los elementos simétricos:

a) $\frac{3}{8}$ b) $-\frac{4}{7}$ c) $-7\frac{1}{4}$ d) -1

3.11 Usa la propiedad distributiva para hallar el resultado de:

a) $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{3}{9}\right)$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{6}{7} + \frac{1}{4}\right)$

c) $\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{8}\right)$

3.9 COCIENTE DE FRACCIONES

Para dividir una fracción $\frac{a}{b}$ entre la fracción $\frac{c}{d}$ se multiplica $\frac{a}{b}$ por la inversa de $\frac{c}{d}$. Es decir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (3.3)$$

Así, por ejemplo:

$$\frac{5}{8} \div \frac{3}{5} = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 3} = \frac{25}{24}$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(\frac{2}{9}\right) = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{9}{2}\right) = -\frac{36}{10} = -\frac{18}{5}$$

Algunas veces el cociente $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (3.4)$$

Así, por ejemplo:

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{5} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 1} = \frac{15}{4}$$

3.10 EJERCICIOS COMBINADOS DE ADICIÓN, SUSTRACCIÓN, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

EJEMPLO 3.6

Determina el resultado de las siguientes operaciones:

$$\text{a) } \left[\left(-\frac{3}{8} \right) \div \frac{1}{4} \right] \cdot \left[\left(-\frac{2}{3} \right) \div \left(-\frac{1}{4} \right) \right]$$

$$\text{b) } \frac{\left(-\frac{1}{2} \right) \div \left(\frac{5}{6} \div \frac{2}{9} \right)}{\left(-\frac{2}{5} \right) \cdot \frac{7}{10}}$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left[\left(-\frac{3}{8} \right) \div \frac{1}{4} \right] \cdot \left[\left(-\frac{2}{3} \right) \div \left(-\frac{1}{4} \right) \right] = \\ & = \left[\frac{(-3) \cdot 4}{8 \cdot 1} \right] \cdot \left[\frac{(-2) \cdot (-4)}{3 \cdot 1} \right] = \left(-\frac{12}{8} \right) \cdot \left(\frac{8}{3} \right) = -\frac{96}{24} = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{\left(-\frac{1}{2} \right) \div \left(\frac{5}{6} \div \frac{2}{9} \right)}{\left(-\frac{2}{5} \right) \cdot \frac{7}{10}} = \frac{\left(-\frac{1}{2} \div \frac{45}{12} \right)}{-\frac{14}{50}} = \frac{-\frac{12}{90}}{-\frac{14}{50}} = \\ & = \frac{12 \cdot 50}{90 \cdot 14} = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 14} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

3.11 PROBLEMAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

EJEMPLO 3.7

Un terreno rectangular mide $\frac{1}{4}$ km por un lado y $\frac{1}{7}$ km por el otro. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan para cercarlo?

Solución

Como es un terreno rectangular, la longitud total del terreno en km es:

$$L = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{4} + \frac{2}{7} = \frac{14+8}{28} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$$

La longitud expresada en metros es:

$$L = \frac{11}{14} \cdot 10^3 = 0,785 \cdot 10^3 = 785 \text{ m}$$

Lo que indica que se necesitarán 785 m de alambre para completar una vuelta del terreno. Si se utilizan 4 pelos de alambre, esta cantidad hay que multiplicarla por 4.

EJEMPLO 3.8

Ernesto tiene $12\frac{1}{4}$ años y Lourdes tiene $2\frac{5}{12}$ más que Ernesto. ¿Qué edad tiene Lourdes? ¿Cuántos años suman ambas edades?

Solución

La edad de Lourdes se puede obtener mediante la adición:

$$12\frac{1}{4} + 2\frac{5}{12} = \frac{49}{4} + \frac{29}{12} = \frac{147+29}{12} = \frac{176}{12}$$

Convirtiendo la fracción anterior en un número mixto:

$$\frac{176}{12} = 14\frac{8}{12}$$

Es decir, Lourdes tiene 14 años y 8 meses. La suma de ambas edades se puede determinar mediante la adición de las fracciones:

$$12\frac{1}{4} + 14\frac{8}{12} = 12\frac{3}{12} + 14\frac{8}{12} = 26\frac{11}{12}$$

Lo cual indica que ambas edades suman 26 años y 11 meses.

EJEMPLO 3.9

En una elección, $\frac{1}{3}$ de los votantes simpatiza con el candidato A, $\frac{1}{4}$ con el candidato B y el resto con los otros candidatos. a) ¿Qué parte de los votantes simpatiza con los candidatos A y B? b) ¿Qué parte de los votantes simpatiza con los otros candidatos?

Solución

a) Para determinar cuántos votantes simpatizan con los candidatos A y B efectuamos la siguiente adición de fracciones:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$$

Es decir, 7 de cada 12 votantes simpatizan con los candidatos A y B.

b) Si denotamos por la unidad al conjunto total de los simpatizantes, el número de ellos que están con candidatos distintos a A y B, será:

$$1 - \frac{7}{12} = \frac{12-7}{12} = \frac{5}{12}$$

El resultado anterior indica que de cada 12 votantes, 5 simpatizan con candidatos distintos de A y B.

EJEMPLO 3.10

Irene se tomó $\frac{3}{7}$ de un envase de leche y Hugo se tomó $\frac{1}{3}$ del mismo. ¿Cuánto dejaron?

Solución

Para determinar la cantidad de leche que Irene y Hugo se tomaron, efectuamos la operación:

$$\frac{3}{7} + \frac{1}{3} = \frac{9+7}{21} = \frac{16}{21}$$

Es decir, entre los dos se tomaron $\frac{16}{21}$ (0,76 o el 76%) de la leche. Si la leche total del envase la representamos por la unidad, lo que dejaron fue:

$$1 - \frac{16}{21} = \frac{21-16}{21} = \frac{5}{21}$$

Por tanto, en el envase quedó $\frac{5}{21}$ (0,24) o el 24% de la leche.

EJEMPLO 3.11

Un tanque de agua va a ser llenado por 3 tubos que tienen las siguientes características:

Tubo A: si funcionara solo, llenaría el tanque en 5 horas.

Tubo B: si funcionara solo, llenaría el tanque en 10 horas.

Tubo C: si funcionara solo, llenaría el tanque en 15 horas.

a) Si se abren todos los tubos, ¿qué parte del tanque estará lleno en una hora?

b) ¿Se botará el agua del tanque a las 3 horas?

Solución

Al tanque lleno lo representaremos por la unidad.

a) El tubo A llena el tanque en 5 horas y, por tanto, en 1 hora habrá completado $\frac{1}{5}$ del total. El tubo B en 1 hora cubrirá $\frac{1}{10}$ del total y el tubo C cubrirá $\frac{1}{15}$ del total. Entonces, en 1 hora los 3 tubos llenarán:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{6+3+2}{30} = \frac{11}{30}$$

es decir, sólo $\frac{11}{30}$ (0,37) del tanque estará lleno en 1 hora.

b) En 3 horas, los tubos A, B y C proporcionarán 3 veces la cantidad que proporcionan en 1 hora; por tanto:

$$\text{Cantidad de agua en 3 horas: } 3 \cdot \frac{11}{30} = \frac{33}{30} = 1,1$$

como la cantidad obtenida es mayor que la unidad (la cual representa al tanque lleno), el tanque se derramará si se deja llenar durante 3 horas.



EJERCICIOS

3.12 Determina el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{2} \div \frac{3}{8}$ b) $\left(-\frac{3}{8}\right) \div \frac{2}{10}$ c) $\left(-\frac{7}{9}\right) \div \left(-\frac{1}{4}\right)$

d) $(-2) \div \frac{1}{7}$ e) $\left(\frac{5}{4} \div \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{1}{8}$

f) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right) \div \frac{3}{5}\right] \cdot \left[\left(-\frac{4}{7}\right) \div \left(-\frac{12}{21}\right)\right]$

3.13 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{\left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(\frac{2}{9} \div \frac{1}{18}\right)}{\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{12}\right)}$

b) $\left(-\frac{3}{11}\right) \cdot 22 + \frac{8}{12} \div \frac{16}{3}$

c) $\left(\frac{5}{16} + \frac{1}{32}\right) \div \left(\frac{15}{8}\right) \div \left(-\frac{2}{9}\right)$

d) $\frac{3^2 - \left[\frac{5}{3} \div \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{4}\right)\right]}{\frac{5}{10} \div \frac{4}{10} - 1}$

3.14 Un terreno rectangular mide $\frac{1}{3}$ km por un lado y $\frac{7}{12}$ km por otro. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan para cercarlo?

3.15 Maritza tenía en su cartera Bs. 150, pagó Bs. $16\frac{2}{3}$ en una tienda, gastó Bs. $7\frac{1}{4}$ y recibió la cantidad de Bs. $8\frac{4}{3}$. ¿Qué cantidad tiene actualmente?

3.12 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES. PROBLEMAS.

EJEMPLO 3.12

- a) Determina las $\frac{3}{7}$ partes de 28.
 b) Determina las $\frac{4}{5}$ partes de $-\frac{1}{3}$.
 c) Determina la mitad de la suma $\frac{3}{8} + \frac{5}{16}$.

Solución

a) Las $\frac{3}{7}$ de 28: $\frac{3}{7} \cdot 28 = \frac{3 \cdot 28}{7} = 12$

b) Los $\frac{4}{5}$ de $-\frac{1}{3}$: $\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{15}$

c) La mitad de la suma $\frac{3}{8} + \frac{5}{16}$:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{16}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6+5}{16}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{16} = \frac{11}{32}$$

EJEMPLO 3.13

Vilma tenía Bs. 25.000. Gastó $\frac{1}{5}$ de su dinero en la compra de ropa y $\frac{1}{100}$ de lo que le sobró, en pasajes. a) ¿Cuánto gastó en ropa? b) ¿Cuánto gastó en pasajes? c) ¿Cuánto le quedó?

Solución

a) Lo que gastó en ropa se obtiene multiplicando $\frac{1}{5}$ por 25.000:

$$\frac{1}{5} \cdot 25.000 = 5.000$$

Es decir, Vilma gastó Bs. 5.000 en ropa.

b) Lo que le sobró en bolívars: $25.000 - 5.000 = 20.000$. Para determinar cuánto gastó en pasajes efectuamos la siguiente multiplicación:

$$\frac{1}{100} \cdot 20.000 = 200$$

Lo que indica que Vilma gastó Bs. 20 en pasajes.

c) Lo que le quedó en bolívars fue:

$$2.500 - 500 - 20 = 1.980$$

EJEMPLO 3.14

Una computadora cuesta Bs. 3.600.000 al contado. Para adquirirla hay que dar una cuota inicial del 30% y 3 cuotas mensuales sucesivas de $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{5}$ de lo que queda por pagar. a) ¿Cuál es la cuota inicial? b) ¿Cuánto hay que pagar en cada uno de los 3 meses siguientes?

Solución

a) El 30% de 3.600.000 es: $\frac{30}{100} \cdot 3.600.000 = 1.080.000$

La cuota inicial debe ser Bs. 1.080.000.

b) Quedan por pagar $3.600.000 - 1.080.000 = 2.520.000$ bolívares. Luego,

1ra. cuota, $\frac{1}{5}$ de 2.520.000: $\frac{1}{5} \cdot 2.520.000 = 504.000$

2da. cuota, $\frac{2}{5}$ de 2.520.000: $\frac{2}{5} \cdot 2.520.000 = 1.008.000$

3ra. cuota, $\frac{2}{5}$ de 252.000: $\frac{2}{5} \cdot 2.520.000 = 1.008.000$

EJEMPLO 3.15

a) ¿Cuántas veces está contenido $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{5}$? b) ¿Cuántas veces $\frac{6}{20}$ contiene a $\frac{1}{10}$? c) ¿Cuántas veces está contenido

$$\frac{45}{240} \text{ en } \frac{9}{16}?$$

Solución

a) Efectivamente, $\frac{1}{10}$ está contenido en $\frac{1}{5}$ porque $\frac{1}{5} > \frac{1}{10}$. Luego, para saber cuántas veces $\frac{1}{5}$ contiene a $\frac{1}{10}$ tenemos que dividir $\frac{1}{5}$ entre $\frac{1}{10}$:

$$n = \frac{1}{5} \div \frac{1}{10} = \frac{10}{5} = 2$$

Lo cual indica que $\frac{1}{10}$ está contenido 2 veces en $\frac{1}{5}$.

b) Como $\frac{6}{20}$ es mayor que $\frac{1}{10}$, efectivamente $\frac{6}{20}$ contiene a $\frac{1}{10}$ un número de veces dadas por:

$$n = \frac{6}{20} \div \frac{1}{10} = \frac{60}{20} = 3$$

c) Se tiene:

$$n = \frac{9}{16} \div \frac{45}{240} = \frac{9 \cdot 240}{16 \cdot 45} = \frac{240}{80} = 3$$

EJEMPLO 3.16

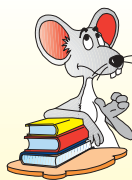
Un tambor de agua tiene un volumen de 200 litros y se llena con una manguera que suministra $\frac{5}{8}$ litros por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse?

Solución

Para saber el tiempo que tarda el tambor en llenarse, debemos dividir 200 entre $\frac{5}{8}$:

$$n = 200 \div \frac{5}{8} = \frac{1.600}{5} = 320$$

Por tanto, el tambor tarda en llenarse 320 minutos.



EJERCICIOS



3.16 Determina cuántas veces está contenido:

a) $\frac{1}{9}$ en $\frac{6}{18}$

b) $\frac{1}{3}$ en $\frac{18}{27}$

3.17 ¿Cuántas veces 18 contiene a $\frac{3}{12}$?
¿Cuántas veces $\frac{20}{4}$ contiene a $\frac{1}{3}$?

3.18 Determina:

a) Las $\frac{5}{9}$ partes de 36 b) Los $\frac{3}{12}$ de -18

4

PROYECCIONES ORTOGONALES

4.1 PROYECCIONES OBLICUA Y ORTOGONAL

Considera un cuerpo esférico situado delante de un plano como se muestra en la fig. 4.1. Delante del cuerpo se coloca una linterna en las posiciones A y B. Cuando la linterna está en la posición A, su eje forma un ángulo de 90° con respecto al plano. En este caso, la sombra proyectada sobre el plano es un círculo y la proyección se denomina **proyección ortogonal**. En el otro caso, cuando la linterna está en la posición B, su eje no forma un ángulo de 90° con el plano. La sombra proyectada sobre el plano es un óvalo y la proyección se denomina **proyección oblicua**.

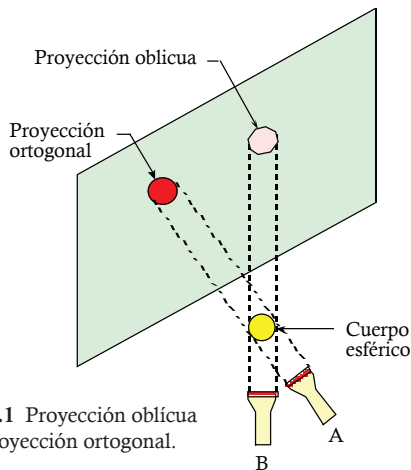


Fig. 4.1 Proyección oblicua y proyección ortogonal.

Como puedes ver, la proyección del cuerpo esférico, y en general de cualquier cuerpo sólido, depende de la posición de la linterna con respecto al plano de proyección.

4.2 PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA

Considera una recta R y un punto P tal como se muestra en la fig. 4.2. Si desde el punto P se traza

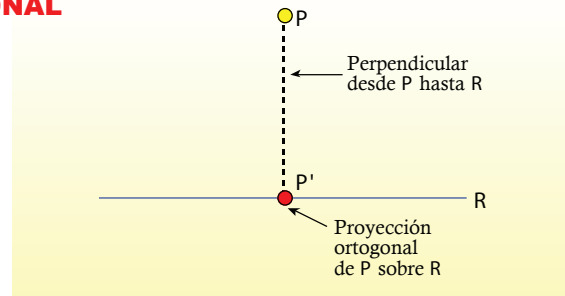


Fig. 4.2 Proyección del punto P sobre la recta R .

una perpendicular hasta la recta R , se obtiene el punto P' que es la intersección de dicha perpendicular con R . Al punto P' se le denomina **proyección ortogonal de P sobre R** .

Con el fin de trazar una perpendicular desde un punto cualquiera P a una recta R , se puede usar el siguiente procedimiento (ver fig. 4.3):

1. Con centro en P , dibuja un arco de circunferencia que corte a la recta R en dos puntos, A y B .
2. Con centro en A y luego con centro en B y con una abertura de compás igual a la distancia AP o BP , traza arcos de circunferencia. Se obtiene así el punto M . La unión de P con M es la recta perpendicular deseada.

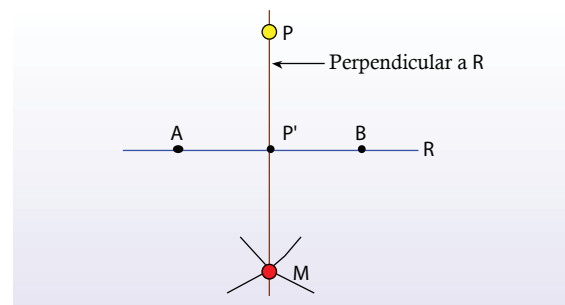


Fig. 4.3 Trazado de una recta perpendicular a R que pasa por el punto P .

4.3 PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN SEGMENTO SOBRE UNA RECTA

Si consideramos que un segmento está formado por un número infinito de puntos, la proyección ortogonal de un segmento es un caso particular del caso anteriormente discutido.

Observemos la fig. 4.4 (a) donde el segmento ab , paralelo a la recta R , se va a proyectar perpendicularmente sobre la misma. Se podría pensar que para obtener dicha proyección es necesario proyectar todos los puntos que forman el segmento ab ; sin embargo, basta sólo proyectar los extremos del segmento, a y b , y unir dichas proyecciones, a' y b' , para obtener la respuesta. Se dice entonces que el segmento $a'b'$ es la **proyección perpendicular u ortogonal** del segmento ab sobre la recta R . En la fig. 4.4 (b), el segmento ab no es paralelo a la recta R . Su proyección ortogonal es también el segmento $a'b'$.

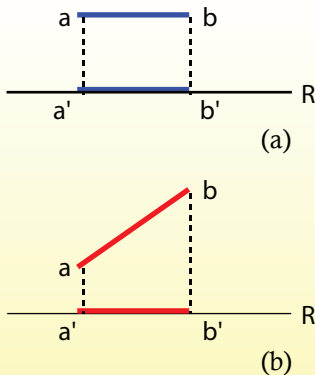


Fig. 4.4 La proyección ortogonal de un segmento ab sobre una recta R es el segmento $a'b'$.

De los dos casos presentados se puede deducir lo siguiente:

- Bastan sólo dos puntos, los extremos, para hallar la proyección ortogonal de los segmentos sobre la recta R .
- Aun cuando los segmentos a proyectar tienen distintas longitudes, sus proyecciones ortogonales tienen las mismas longitudes.

La fig. 4.5 muestra otros casos de proyecciones ortogonales de segmentos sobre una línea recta. En la fig. 4.5(b), la proyección se reduce al punto P .

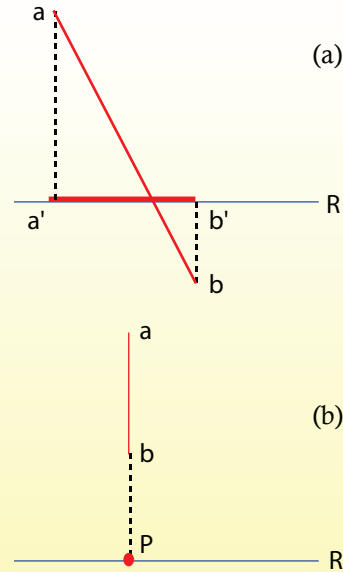


Fig. 4.5 Ejemplos de proyecciones ortogonales de segmentos sobre una línea recta.

EJEMPLO 4.1

Determina las proyecciones ortogonales del segmento ab sobre las rectas R y R' de la fig. 4.6 (a).

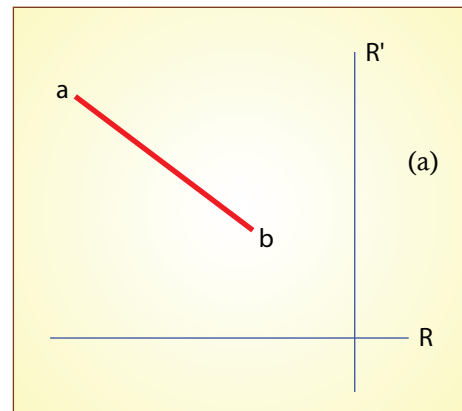


Fig. 4.6(a) ¿Cuál es la proyección del segmento ab sobre las rectas R y R' ?

Solución

En la fig. 4.6(b) se presentan ambas proyecciones. Resultan, así, los segmentos $a'b'$ y $a''b''$.

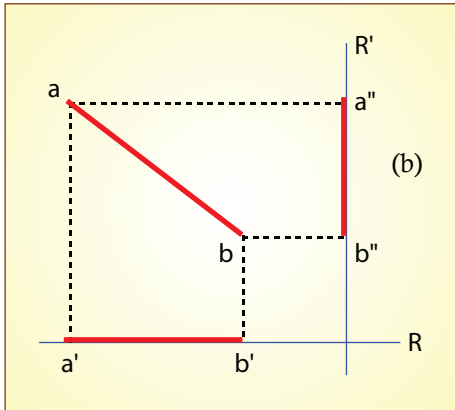


Fig. 4.6(b) Proyecciones ortogonales del segmento ab sobre las rectas R y R' .

EJEMPLO 4.2

Determina la proyección ortogonal del triángulo mostrado en la fig. 4.7(a) sobre las rectas R y R' .

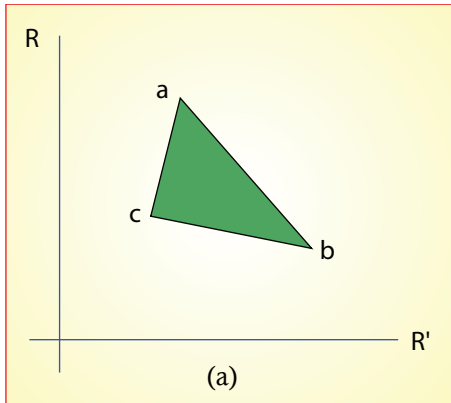


Fig. 4.7(a) ¿Cuál es la proyección ortogonal del triángulo abc sobre las rectas R y R' ?

Solución

La respuesta aparece en la fig. 4.7(b). La proyección ortogonal del triángulo abc sobre la recta R es el segmento $a'b'$, mientras que la proyección ortogonal sobre la recta R' es el segmento $c''b''$.

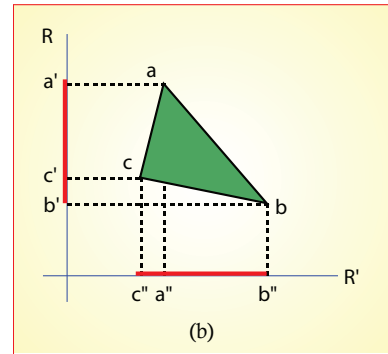


Fig. 4.7(b) Proyección ortogonal del triángulo abc sobre las rectas R y R' .

EJEMPLO 4.3

Determina la proyección ortogonal del cuadrado $abcd$ de la fig. 4.8(a) sobre la recta L .

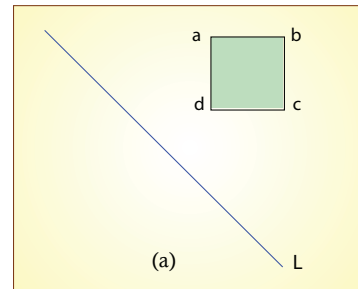


Fig. 4.8(a) ¿Cuál es la proyección ortogonal del cuadrado $abcd$ sobre la recta L ?

Solución

En la fig. 4.8(b) se presenta la solución. Como puedes notar, únicamente los puntos extremos, a y c , cuyas proyecciones sobre la recta L son los puntos a' y c' , son importantes en la determinación de la proyección del cuadrado sobre L .

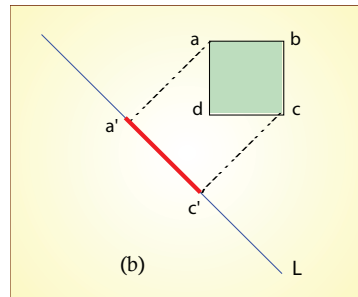
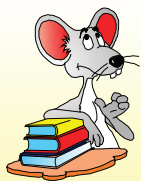


Fig. 4.8(b) Proyección ortogonal del cuadrado $abcd$ sobre la recta L . Ejemplo 4.3.



EJERCICIOS



4.1 Determina las proyecciones ortogonales de los puntos sobre la recta (fig. 4.9).

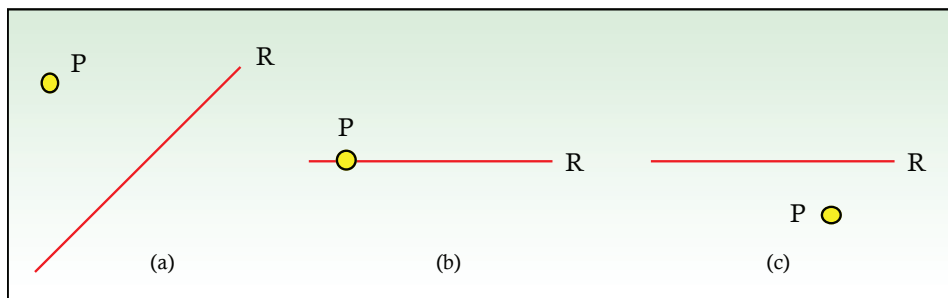


Fig. 4.9 Ejercicio 4.1.

4.2 En la fig. 4.10 determina la proyección ortogonal del segmento ab sobre la recta R .

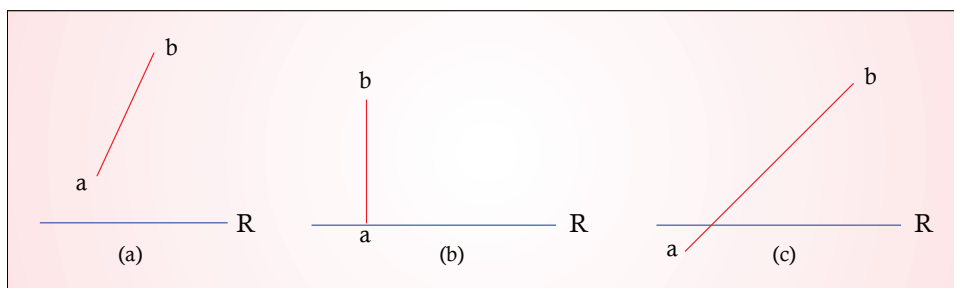


Fig. 4.10 Ejercicio 4.2.

4.3 En la fig. 4.11 dibuja la proyección ortogonal del segmento ab sobre las rectas R y R' .

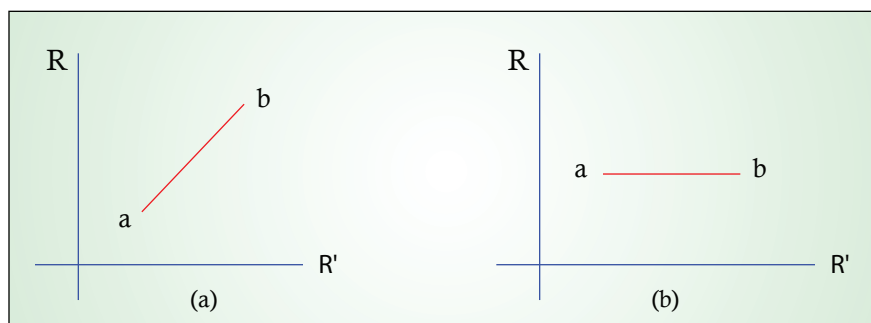


Fig. 4.11 Ejercicio 4.3.

5

COORDENADAS RECTANGULARES

5.1 SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

Considera la fig. 5.1. Se trata de dos rectas perpendiculares entre sí que se cortan en el punto O. A tal configuración geométrica se le conoce con el nombre de *sistema de coordenadas rectangulares* o *sistema de ejes cartesianos*. Al eje horizontal OX se le conoce como *eje de las abscisas*, mientras que al eje vertical OY se le denomina *eje de las ordenadas*. Es común también referirse a esos ejes como "*eje de las X*" y "*eje de las Y*". Al punto O se le llama *origen del sistema de coordenadas*. Las puntas de las flechas en la fig. 5.1 indican las direcciones de incremento de las X y de las Y. Es decir, X aumenta de valor hacia la derecha, mientras Y aumenta de valor hacia arriba.

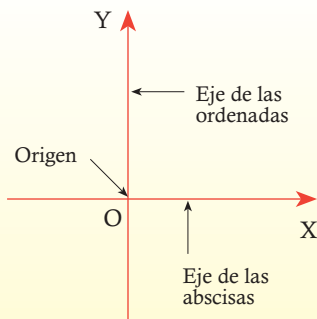


Fig. 5.1 Sistema de coordenadas rectangulares.

Los ejes de coordenadas dividen al plano cartesiano en 4 partes llamadas *cuadrantes*. Tenemos así, como se indica en la fig. 5.2, el primer (I), segundo (II), tercer (III) y cuarto (IV) cuadrantes. Observa que los cuadrantes se definen en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

El eje de las abscisas en el sistema de coordenadas

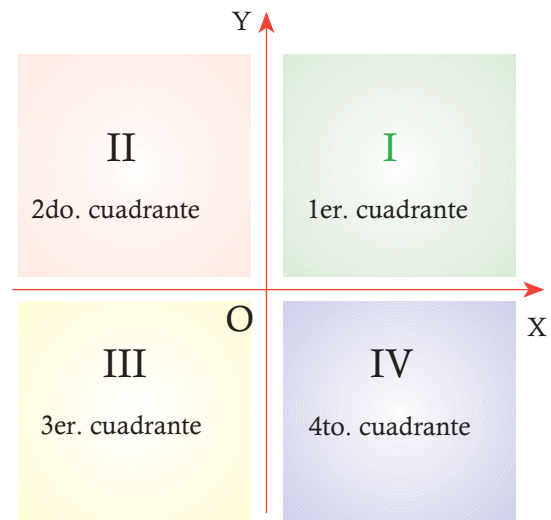


Fig. 5.2 Cuadrantes en un sistema de coordenadas rectangulares.

cartesianas, es semejante a la recta numérica ya estudiada por ti. A la derecha del origen se representan los números positivos, mientras que a la izquierda del origen se representan los números negativos. De manera similar, los puntos que están por arriba del origen sobre el eje de las ordenadas representan números positivos, mientras que los que están por debajo del origen sobre el eje de las ordenadas representan números negativos.

5.2 COORDENADAS DE UN PUNTO

Imaginemos un punto P situado en el plano definido por el sistema de coordenadas de la fig. 5.3. ¿Cómo podemos establecer con precisión la ubicación de P en el plano? Una forma es asociar cada punto con un par ordenado (a, b) donde la primera componente, a , está relacionada con el eje X y se le denomina *abscisa* del punto, mientras que la segunda componente, b , se relaciona con el eje Y

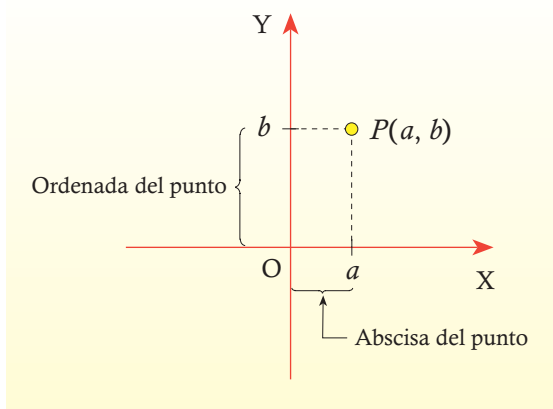


Fig. 5.3 Coordenadas de un punto.

y se le denomina *ordenada* del punto. La abscisa y la ordenada corresponden a las *coordenadas* del punto. Tanto la abscisa como la ordenada de un punto puede tener un valor positivo o negativo, de acuerdo con el cuadrante donde estén situadas.

De lo dicho anteriormente puede deducirse lo siguiente:

1. A cada punto P del plano le corresponde un par ordenado (a, b) .
2. Dado un par ordenado (a, b) en el plano, existe sólo un punto con esas coordenadas.

Al punto P , se le puede representar simbólicamente como $P(x, y)$ donde x y y son la abscisa y la ordenada de P . Así, por ejemplo, podemos escribir:

$$P(3, 4) \begin{cases} \text{Abscisa: } 3 \\ \text{Ordenada: } 4 \end{cases} \quad P(-3, 4) \begin{cases} \text{Abscisa: } -3 \\ \text{Ordenada: } 4 \end{cases}$$

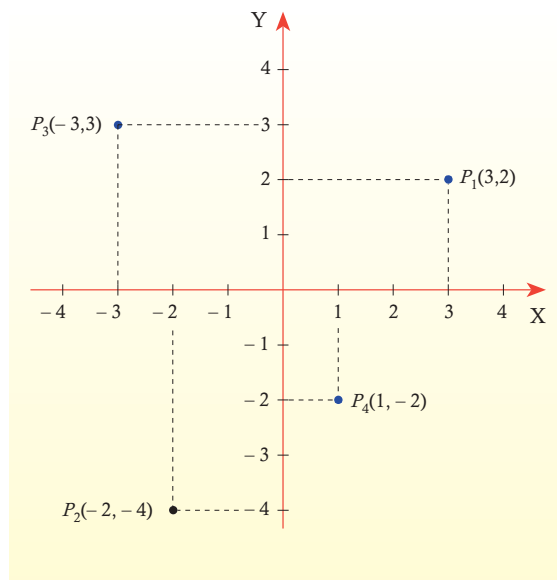
EJEMPLO 5.1

Determina la ubicación en el plano cartesiano de los siguientes puntos:

$$P_1(3, 2) \quad P_2(-2, -4) \quad P_3(-3, 3) \quad P_4(1, -2)$$

Solución

La fig. 5.4 muestra la ubicación de los puntos dados.

Fig. 5.4 Ubicación de los puntos $(3, 2)$, $(-2, -4)$, $(-3, 3)$, $(1, -2)$ en un plano cartesiano. Ejemplo 5.1.

5.3 PUNTOS NOTABLES EN UN SISTEMA DE COORDENADAS

- Coordenadas del origen:* el punto O , origen del sistema de coordenadas cartesianas, tiene abscisa cero y ordenada cero y, por tanto, puede escribirse como $P(0, 0)$.
- Coordenadas de un punto situado sobre el eje de las abscisas:* cualquier punto situado sobre el eje X tiene como ordenada cero y por tanto puede escribirse como $P(x, 0)$.
- Coordenadas de un punto situado sobre el eje de las ordenadas:* cualquier punto situado sobre el eje Y tiene como abscisa cero y por tanto puede escribirse como $P(0, y)$.

EJEMPLO 5.2

Ubica los siguientes puntos sobre un eje de coordenadas rectangulares:

$$P_1(0, 0) \quad P_2(3, 0) \quad P_3(0, 3) \quad P_4(-2, 0)$$

Solución

El punto P_1 corresponde al origen de coordenadas.

El punto P_2 está sobre el eje X ya que tiene ordenada cero.

El punto P_3 está sobre el eje Y ya que tiene abscisa cero.

El punto P_4 está sobre el eje X ya que tiene ordenada cero.

En la fig. 5.5 se muestra la ubicación de los puntos dados.

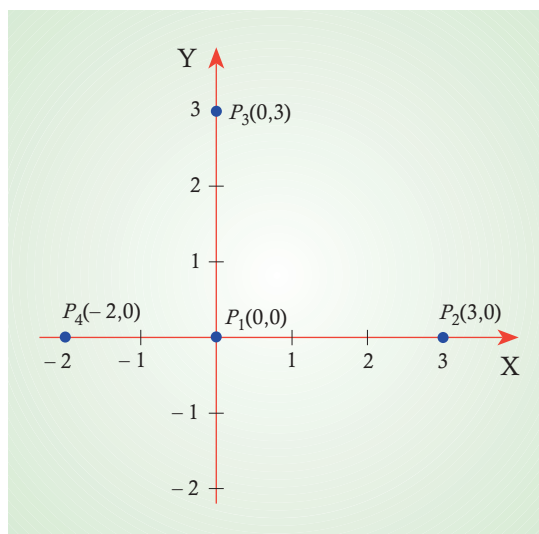


Fig. 5.5 Ubicación de los puntos $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$ y $(-2, 0)$ en el plano cartesiano.

EJEMPLO 5.3

Dibuja la línea recta que pasa por los puntos $P_1(0, 2)$ y $P_2(-2, -2)$.

Solución

La figura 5.6 muestra la solución. El punto P_1 está sobre el eje Y por tener abscisa 0.

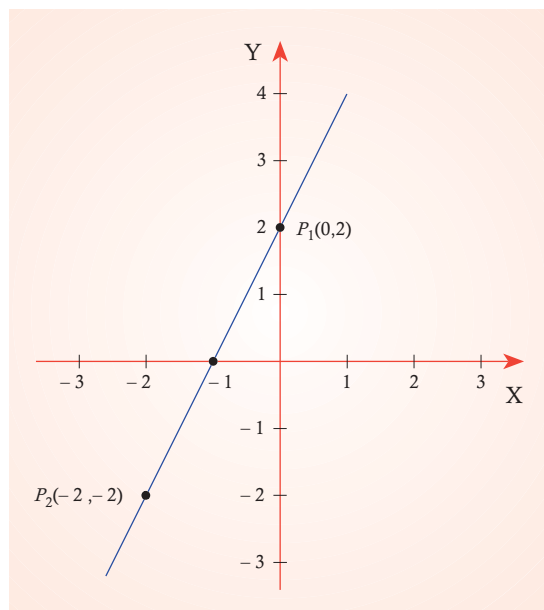


Fig. 5.6 Línea recta que pasa por los puntos $P_1(0, 2)$ y $P_2(-2, -2)$. Ejemplo 5.3.



En los ejercicios que siguen, utiliza papel cuadrículado o milimetrado.

5.1 Dibuja la ubicación en el plano de los siguientes puntos:

$$P_1(1, 3) \quad P_2(-1, 3) \quad P_3(-2, -3) \quad P_4(3, -2)$$

$$P_5(0, 2) \quad P_6(-2, 0) \quad P_7(0, -4) \quad P_8(3, 0)$$

5.2 Ubica los siguientes puntos en el plano:

$$P_1(10, 30) \quad P_2(-5, 10)$$

$$P_3(50, -40) \quad P_4(-20, -50)$$

5.3 Ubica los siguientes puntos en el plano:

$$P_1\left(1, \frac{1}{3}\right) \quad P_2\left(-2, \frac{1}{4}\right) \quad P_3\left(-\frac{1}{4}, 2\right) \quad P_4\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

5.4 Dibuja los triángulos cuyos vértices son:

a) $P_1(0, 0)$ $P_2(1, 3)$ $P_3(-2, 1)$

b) $P_1(1, 0)$ $P_2(-2, 0)$ $P_3(0, -2)$

5.5 Dibuja las líneas rectas que pasan por los puntos:

a) $P_1(2, 1)$ $P_2(0, 3)$

b) $P_1(0, 0)$ $P_2(3, 2)$

c) $P_1(1, 3)$ $P_2(1, -2)$

d) $P_1(-2, 0)$ $P_2(1, 0)$

5.6 Determina gráficamente el punto de intersección de las rectas que pasan por los puntos:

Recta 1: $P_1(0, 3)$ $P_2(3, 0)$

Recta 2: $P_1(0, 0)$ $P_2(4, 2)$

5.4 GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN

Cuando estudiamos el objetivo 1 sobre funciones, dijimos que la notación:

$$y = f(x)$$

se leía como "y es una función de x" y establecía las operaciones que habían de efectuarse sobre los elementos x del conjunto A para obtener las imágenes y en el conjunto B . Así por ejemplo, la función:

$$y = f(x) = x + 3$$

nos dice que a cada elemento x del conjunto A debe sumarse 3 para determinar las imágenes correspondientes en el conjunto B . Para los elementos $x = 2$ y $x = 5$ del conjunto A se obtienen las siguientes imágenes en el conjunto B :

$$f(2) = 2 + 3 = 5 \quad f(5) = 5 + 3 = 8$$

Lo discutido anteriormente nos permite representar gráficamente una función en un sistema de coordenadas rectangulares.

En efecto, los distintos valores de x pueden ser asociados con valores sobre el eje de las abscisas, mientras que los correspondientes valores de $f(x)$ pueden asociarse con valores sobre el eje de las ordenadas. Los pares ordenados así obtenidos, $P[x, f(x)]$, representan puntos sobre el plano cartesiano que constituyen el gráfico de la función.

EJEMPLO 5.4

Representa gráficamente la función:

$$y = f(x) = x + 2$$

para el conjunto de puntos de x dado por:

$$A = \{0, 1, 2, -1, -2\}.$$

Solución

Este problema se reduce a determinar las imágenes de x en el conjunto B de llegada. Para obtener las imágenes de x , según la función $f(x) = x + 2$, damos a x los valores especificados en el conjunto A :

Valor de x	Imagen	Puntos en el plano
$x = 0$	$y = 2$	$P(0, 2)$
$x = 1$	$y = 3$	$P(1, 3)$
$x = 2$	$y = 4$	$P(2, 4)$
$x = -1$	$y = 1$	$P(-1, 1)$
$x = -2$	$y = 0$	$P(-2, 0)$

En la fig. 5.7 se muestra el gráfico de la función para los puntos dados.

EJEMPLO 5.5

Dada la función:

$$y = f(x) = x^2 - 1$$

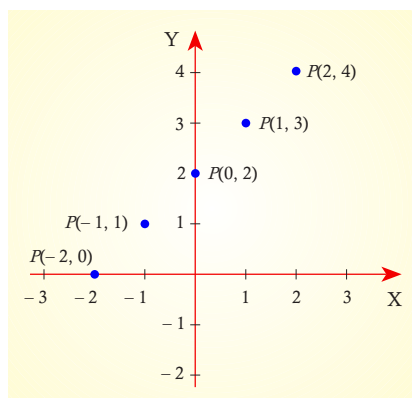


Fig. 5.7 Gráfico de la función $y = x + 2$ para $x = 0, 1, 2, -1$ y -2 . Ejemplo 5.4.

y el conjunto de puntos de x dado por $A = \{0, 1, 2, -1, -2\}$, determina las imágenes y la gráfica de la función.

Solución

Las imágenes de x son:

Valor x	Imagen	Puntos en el plano
$x = 0$	$y = 0^2 - 1 = -1$	$P(0, -1)$
$x = 1$	$y = 1^2 - 1 = 0$	$P(1, 0)$
$x = 2$	$y = 2^2 - 1 = 3$	$P(2, 3)$
$x = -1$	$y = (-1)^2 - 1 = 0$	$P(-1, 0)$
$x = -2$	$y = (-2)^2 - 1 = 3$	$P(-2, 3)$

En la fig. 5.8 se muestran los puntos obtenidos.

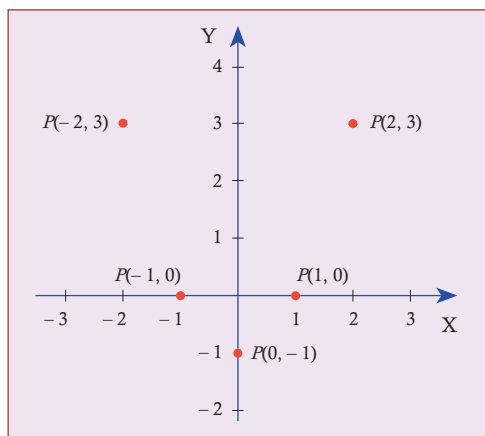


Fig. 5.8 Gráfico de la función $y = x^2 - 1$ para valores de $x = 0, 1, 2, -1, -2$. Ejemplo 5.5.



5.7 Representa gráficamente las funciones para el conjunto de puntos dados:

- a) $y = 2x$ $A = \{0, -1, -2\}$
- b) $y = -x + 1$ $A = \{1, -1, 2, -2\}$
- c) $y = -5x + 3$ $A = \{0, -1, +1\}$
- d) $y = 3x - 4$ $A = \{0, 1, 2\}$
- e) $y = x^2$ $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$
- f) $y = x^3 - 1$ $A = \{0, -1, 0\}$
- g) $y = 4x - x^2$ $A = \{0, 2, 3, -2, -3\}$
- h) $y = 4x - x^2$ $A = \{1, -1, 2, -2\}$

6

LA FUNCIÓN AFÍN

6.1 LA FUNCIÓN AFÍN

Una función afín es aquella cuya representación gráfica es un conjunto de puntos en línea recta. La función afín tiene la forma general:

$$y = mx + b \quad (6.1)$$

donde $m, b \in \mathbf{Q}$ y x aparece elevada a una potencia unitaria. Ejemplos de funciones afines son las siguientes:

$$y = 3x + 5 \quad (m = 3, b = 5)$$

$$y = -x + 7 \quad (m = -1, b = 7)$$

$$y = -2x + 4 \quad (m = -2, b = 4)$$

$$y = 6x \quad (m = 6, b = 0)$$

La gráfica de la función afín en el conjunto $\mathbf{Q}$ es una serie de puntos que, si se unen, originan una línea recta. Para dibujar la gráfica de una función afín, basta con localizar dos puntos de la misma en el plano cartesiano. Se debe hacer notar aquí que esta recta puede contener puntos que no pertenecen a $\mathbf{Q}$ como se estudiará en tus cursos posteriores de Matemática.

EJEMPLO 6.1

Dibuja las gráficas correspondientes a las funciones:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = x^2$

y determina si se trata de funciones afines.

Solución

a) Demos valores a $x \in \mathbf{Q}$ y obtengamos los valores

de y , que también pertenecen a $\mathbf{Q}$. Así se obtienen los puntos correspondientes, $P(x, y)$:

x	y	Puntos en plano X-Y
0	$2 \cdot 0 - 3 = -3$	$P(0, -3)$
1	$2 \cdot 1 - 3 = -1$	$P(1, -1)$
2	$2 \cdot 2 - 3 = 1$	$P(2, 1)$
3	$2 \cdot 3 - 3 = 3$	$P(3, 3)$

La representación gráfica de la función se muestra en la fig. 6.1(a). Como se puede observar, se trata de una función afín, ya que la gráfica resultante es un conjunto de puntos en línea recta, tal como lo indica la línea en trazos. Este resultado pudo haber sido anticipado si notamos que la función:

$$y = 2x - 3$$

tiene la forma de la relación (6.1) con $m = 2$ y $b = -3$. Además, x aparece elevado a la potencia 1.

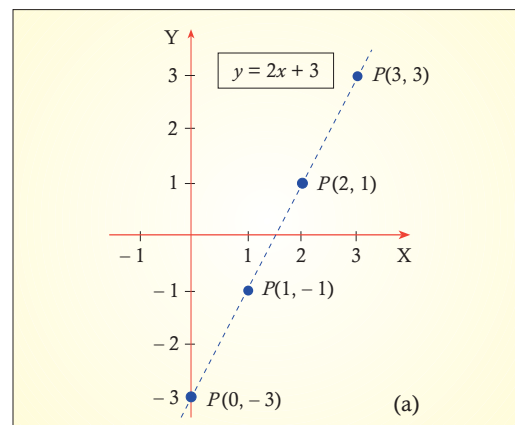


Fig. 6.1 (a) Representación de la función $y = 2x - 3$ en el plano cartesiano. Ejemplo 6.1

b) Si damos valores a x tendremos:

x	y	Puntos en plano X-Y
0	$0^2 = 0$	$P(0, 0)$
1	$1^2 = 1$	$P(1, 1)$
-1	$(-1)^2 = 1$	$P(-1, 1)$
2	$2^2 = 4$	$P(2, 4)$
-2	$(-2)^2 = 4$	$P(-2, 4)$

La representación gráfica se muestra en la fig. 6.1 (b). Evidentemente, si se uniesen los puntos no se obtendría una línea recta y la función no es afín. Este resultado también ha podido predecirse de la forma de la función $y = x^2$, ya que x aparece elevada a la segunda potencia.

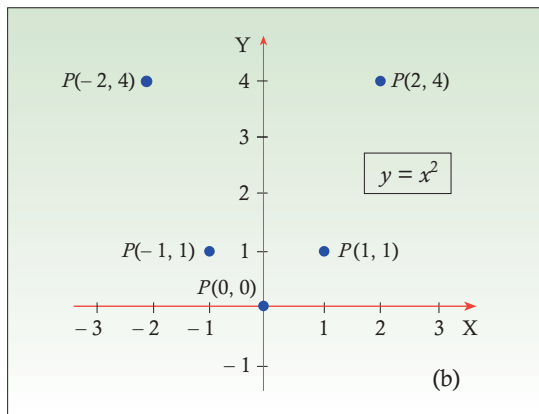


Fig. 6.1 (b) Representación de la función $y = x^2$ en el plano cartesiano. Ejemplo 6.1

EJEMPLO 6.2

Representa gráficamente las funciones:

a) $y = x + 2$ b) $y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

Solución

a) Como la función $y = x + 2$ es afín ($m = 1$ y $b = 2$), bastan dos valores de x , para obtener la

representación gráfica de la función:

x	y	$P(x, y)$
0	$0 + 2 = 2$	$P(0, 2)$
-2	$-2 + 2 = 0$	$P(-2, 0)$

Los dos puntos obtenidos permiten obtener la gráfica de la fig. 6.2. Si se uniesen los puntos, tal como lo muestra la línea de trazos de la figura, se obtendría una línea recta, como corresponde a una función afín.

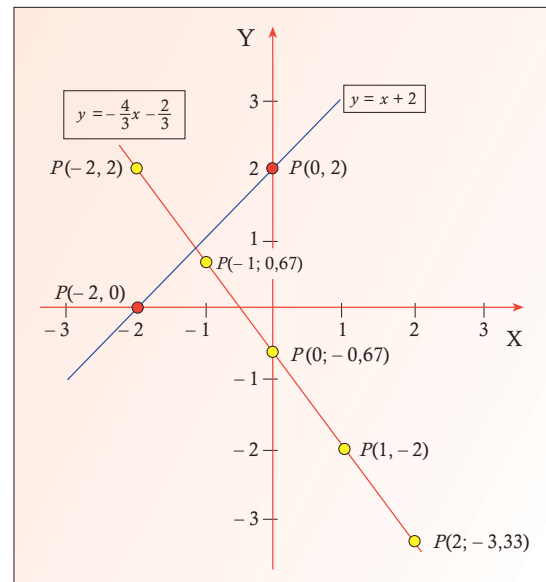


Fig. 6.2 Representación gráfica de las funciones $y = x + 2$

y $y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$. Ejemplo 6.2.

b) Para esta función, $m = \frac{4}{3}$ y $b = -\frac{2}{3}$. En este caso tenemos que ser más cuidadosos en la selección de los valores de x , ya que los resultados para y pueden ser valores fraccionarios, difíciles de localizar en el plano cartesiano. A veces, con funciones como éstas, vale la pena asignar más de dos valores a x para escoger los de más fácil representación. De acuerdo a ello podemos construir la siguiente tabla:

x	y	$P(x, y)$
0	$y = -\frac{2}{3}$	$P(0; -0,67)$
1	$y = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = -2$	$P(1, -2)$
-1	$y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$	$P(-1; 0,67)$
2	$y = -\frac{8}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{10}{3}$	$P(2; -3,33)$
-2	$y = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2$	$P(-2, 2)$

Los 5 puntos anteriores han sido representados en la fig. 6.2. La línea punteada indica la recta que pasaría por esos puntos. Como puedes darte cuenta, representar los puntos cuyas coordenadas son números fraccionarios, tales como $P(0, -0,67)$, $P(-1; 0,67)$, $P(2, -3,33)$, resulta más difícil que representar los puntos con coordenadas enteras tales como $P(1, -2)$ y $P(-2, 2)$. Sin duda que cualquier pareja de puntos basta para representar la función dada, sin embargo, los dos últimos son de más fácil representación.

6.2 CASOS PARTICULARES DE LA FUNCIÓN AFÍN

La función afín tiene la forma general:

$$y = mx + b$$

Veamos su representación gráfica para 3 casos particulares:

Caso 1. $b = 0, m \neq 0$. Si $b = 0$, la relación 6.1 se reduce a:

$$y = mx \quad (6.2)$$

Ejemplos numéricos de la relación anterior son:

$$y = 2x$$

$$y = -3x$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

$$y = -\frac{3}{4}x$$

con valores de $m = 2, -3, \frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{4}$, respectivamente.

De la relación (6.2) también se observa que cuando $x = 0$, la función $y = m \cdot 0 = 0$. Por lo tanto, puede decirse que *la gráfica de la función $y = mx$ contiene al punto $P(0, 0)$.*

La función afín dada por (6.2) aparece en la práctica cuando intervienen dos magnitudes directamente proporcionales. Así por ejemplo, la relación entre el diámetro y el radio de una circunferencia está dada por:

$$D = 2r \quad [y = D; m = 2; x = r] \quad (6.3)$$

La relación anterior tiene entonces la forma dada por (6.2). Si se hace la gráfica de la relación (6.3), como lo indica la línea de trazos en la fig. 6.3, se observa que ésta pasa por el origen que corresponde al punto $P(0, 0)$. Observa que en las ordenadas y las abscisas figuran las letras D y r en lugar de y y x . Los valores negativos, aun cuando satisfacen la relación (6.3), no tienen ningún significado práctico.

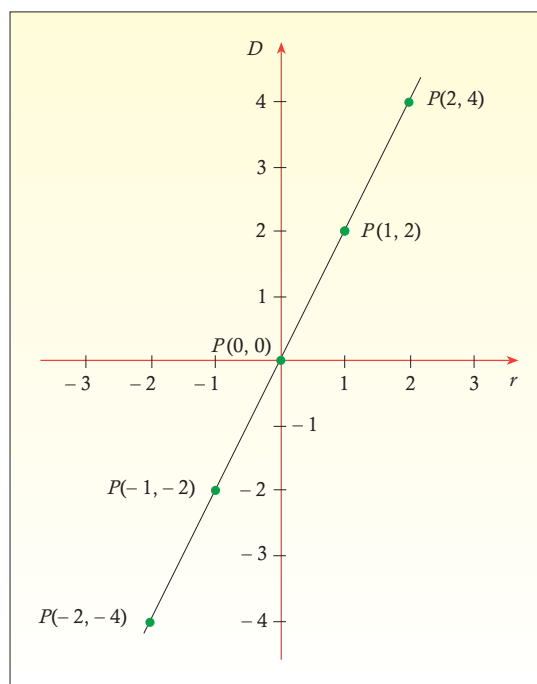


Fig. 6.3 Gráfica de la función $D = 2r$. El resultado es una línea recta que pasa por el origen.

Caso 2. $m = 0$ y $b \neq 0$: Cuando $m = 0$, la relación (6.1) se convierte en:

$$y = b \quad (6.4)$$

La relación anterior representa un conjunto de puntos en línea recta paralela al eje X.

EJEMPLO 6.3

Representa gráficamente las funciones:

a) $y = 2$ b) $y = -1,5$

Solución

La fig. 6.4 muestra el resultado en ambos casos. Para cualquier valor de x , se obtienen siempre puntos que representan valores constantes de y . Las líneas rectas de trazos son paralelas al eje X.

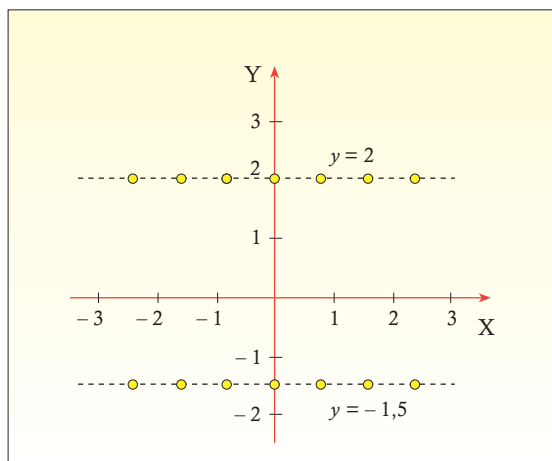


Fig. 6.4 Representación de las funciones $y=2$ y $y=-1,5$. Ejemplo 6.3.

Caso 3. $y=0, m \neq 0, b \neq 0$: Bajo estas condiciones, la relación (6.1) se convierte en la expresión,

$$0 = mx + b \quad (6.5)$$

que no es una función. Despejando x tenemos:

$$x = -\frac{b}{m} \quad (6.6)$$

Como los valores de b y m son constantes, el valor de x en la relación (6.6) es también una constante. Esto significa que la relación (6.5) representa una línea recta paralela al eje Y.

EJEMPLO 6.4

Representa gráficamente las expresiones:

a) $-2x + 4 = 0$ b) $5x + 15 = 0$

Solución

Despejando x en los dos casos:

a) $x = -\frac{4}{-2} = 2$ b) $x = -\frac{15}{5} = -3$

En la fig. 6.5 aparecen las representaciones gráficas. Las dos rectas son paralelas al eje Y de las ordenadas. El punto donde las rectas cortan al eje X corresponde a la división de $-b$ por m , tal como lo establece la relación (6.6).

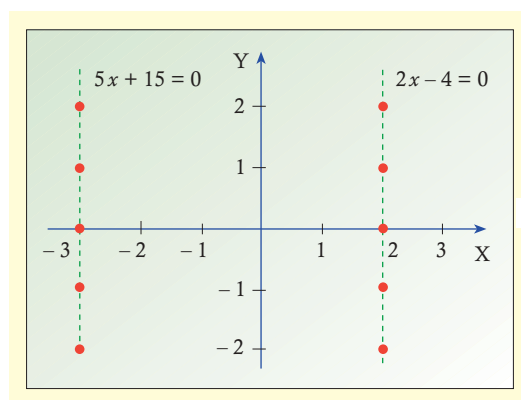


Fig. 6.5 Representación de las expresiones $-2x+4=0$ y $5x+15=0$. Ejemplo 6.4.



6.1 Dibuja las gráficas correspondientes a las funciones:

a) $y = x - 2$ b) $y = -2x$ c) $y = \frac{1}{2}x + 1$
d) $y = 2x - 1$ e) $y = 5x - 4$ f) $y = -3x + 5$

6.2 Si un metro de tela cuesta Bs. 2.000, dibuja una gráfica que permita determinar el costo de hasta 5 m de tela.

6.3 Si la distancia (d) recorrida por un móvil a una rapidez (v) de 10 m/s en función del tiempo t (segundos), está dada por:

$$d = 10t$$

dibuja una gráfica que permita determinar la distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 10$ segundos.

6.4 Dibuja las gráficas correspondientes a las siguientes funciones afines:

a) $y = -3x + 3$

b) $y = 20x$

c) $y = 4$

d) $y = -1$

e) $y = 0$

f) $2x + 5 = 0$

g) $x = 3$

h) $y = x^0$

i) $y = -x + 1$

6.5 Para convertir grados Fahrenheit (F) a grados centígrados (C) se utiliza la siguiente función:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Dibuja la gráfica que permita hacer la conversión. ¿Tienen sentido, en este caso, valores negativos?

7

VECTORES EN EL PLANO

7.1 VECTORES

Piensa en la siguiente afirmación: "Una persona recorre una distancia de 5 km". Si analizas con detenimiento tal afirmación, te darás cuenta que la misma puede ser imprecisa. Podrías preguntarte por ejemplo: ¿Hacia dónde caminó la persona? ¿Hacia el norte? ¿Hacia el sur? ¿De dónde partió? Indudablemente, la afirmación original no permite deducir las respuestas. Es, en cierta manera, incompleta.

Si modificamos la afirmación original por la siguiente: "una persona partió del punto O y recorrió una distancia de 5 km hacia el norte", estaremos siendo más precisos. Simbólicamente, esto se representa como se muestra en la fig. 7.1. Al segmento dirigido $\overrightarrow{ON}$, se le denomina vector y se le representa por $\overrightarrow{ON}$. El punto O corresponde al **origen del vector** y el punto N al **extremo** del mismo. La punta de la flecha indica la dirección, en este caso norte, del desplazamiento.

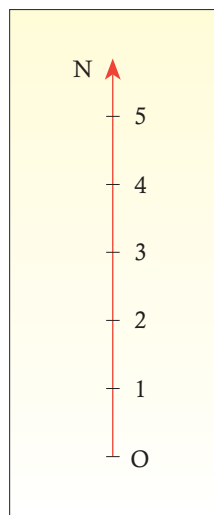


Fig. 7.1 Representación de un vector.

Cada división de la figura representa 1 km, y por lo tanto, el desplazamiento hacia el norte es de 5 km.

En la fig 7.2 se muestran tres vectores distintos $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{mn}$ y $\overrightarrow{pq}$. Como puedes notar, la designación de cada vector se hace de acuerdo con su origen y su extremo. Así, tenemos:

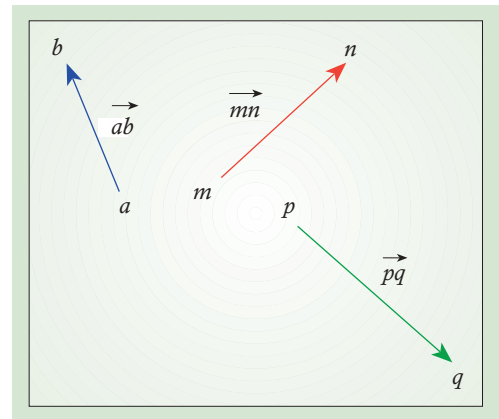


Fig. 7.2 La notación de los vectores $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{mn}$ y $\overrightarrow{pq}$ depende de su origen y su extremo.

$\overrightarrow{ab}$: comienza en a y termina en b .

$\overrightarrow{mn}$: comienza en m y termina en n .

$\overrightarrow{pq}$ comienza en p y termina en q .

7.2 REPRESENTACIÓN DE VECTORES EN EL PLANO CARTESIANO

Una vez especificados el origen y el extremo de un vector, es posible representarlo en un plano cartesiano. Como el origen y el extremo de un vector son puntos de la forma $P(x, y)$ en el sistema de coordenadas rectangulares, su localización en el plano define completamente al vector. Los ejemplos que siguen ilustran el procedimiento a seguir para dibujar un vector en el plano cartesiano.

EJEMPLO 7.1

Representa en el plano cartesiano los vectores cuyos orígenes y extremos se dan:

- a) Vector $\vec{ab}$:
origen $P(0, 0)$ extremo $P(2, 3)$
- b) Vector $\vec{mn}$:
origen $P(-1, 1)$ extremo $P(-3, 3)$
- c) Vector $\vec{u}$:
origen $P(-2, -1)$ extremo $P(2, 5; -2)$
- d) Vector $\vec{v}$:
origen $P(3, 0)$ extremo $P(3, 2)$

Solución

En la fig. 7.3 se muestran las respuestas.

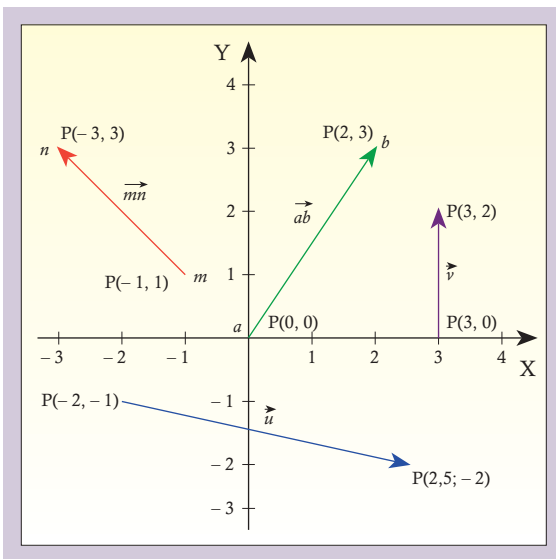


Fig. 7.3 La notación de un vector ($\vec{ab}$, $\vec{mn}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$) depende de su origen y su extremo.

7.3 ELEMENTOS DE UN VECTOR

Un vector lo podemos caracterizar mediante tres elementos básicos: *dirección*, *sentido* y *magnitud*. A continuación, discutimos cada uno de estos elementos.

7.3.1 Dirección de un vector. Ángulos positivos y negativos.

La dirección de un vector corresponde a la dirección de la recta que contiene al vector. Así, el vector $\vec{u}$ de la fig. 7.4 está contenido en la recta R y tiene su misma dirección. De igual manera, el

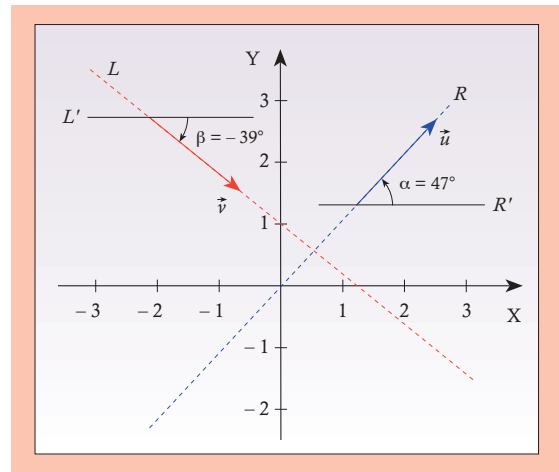


Fig. 7.4 Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen las direcciones de las rectas R y L , respectivamente.

vector $\vec{v}$ tiene la dirección de la recta L que lo contiene. Ahora bien, ¿cómo definimos la dirección de una recta en el plano cartesiano? Existen varias formas de hacerlo.

Una de las más sencillas es medir el ángulo que la recta forma con el eje X o con una recta paralela al mismo. La medida de este ángulo se hace dibujando una recta paralela al eje X por el origen del vector y colocando un transportador con su centro en el punto donde la recta paralela toca al origen del vector. La lectura se hará a partir del segmento de la recta paralela al eje X que queda a la derecha del punto de contacto con el origen del vector. Si este ángulo es medido en sentido antihorario, se dice que es un ángulo **positivo**. Si por el contrario, la medida se efectúa en el sentido de giro de las agujas del reloj, el ángulo será **negativo**.

En la fig. 7.4, por ejemplo, los ángulos α y β , formados con las rectas R' y L' , que pasan por los orígenes de los vectores, son de aproximadamente 47° y -39° , respectivamente. Entonces, diremos que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen direcciones tales que forman ángulos de 47° y -39° con el eje X .

7.3.2 Sentido de un vector

Considera los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en la fig. 7.5. Ambos

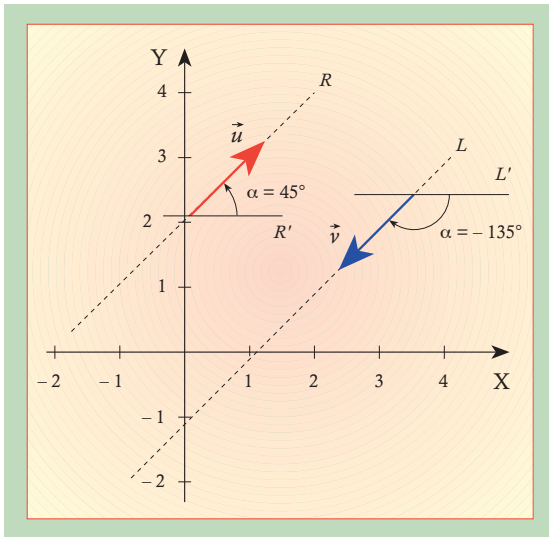


Fig. 7.5 Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección, pero sentidos opuestos.

vectores tienen la misma dirección, ya que las rectas que los contienen forman el mismo ángulo α con el eje X. Sin embargo, el vector $\vec{u}$ apunta hacia arriba mientras que $\vec{v}$ apunta hacia abajo. Se dice, entonces, que tienen sentidos contrarios. El sentido de un vector viene dado por la punta de la flecha que lo representa.

7.3.3 Magnitud de un vector

Es la longitud del segmento dirigido que representa al vector. A la magnitud de un vector también se le denomina **módulo**. A la magnitud del vector $\vec{ab}$ se le representa de las siguientes formas:

$$\text{Módulo de } \vec{ab} = ab = |\vec{ab}|$$

Observa que el módulo de $\vec{ab}$ se representa por ab sin la flechita encima. *El módulo de un vector se obtiene midiendo la longitud del mismo.*

EJEMPLO 7.2

Dadas las siguientes coordenadas:

$$P(1, 2); \quad Q(3, 2); \quad R(-3, 4); \quad S(-1, 2);$$

$$T(-2, -2); \quad U(1, 5; -2); \quad V(1, 5; 1)$$

dibuja los vectores $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$, $\vec{ST}$ y $\vec{UV}$ y determina el módulo y la dirección de cada uno.

Solución

En la fig. 7.6 se representan los vectores $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$, $\vec{ST}$ y $\vec{UV}$.

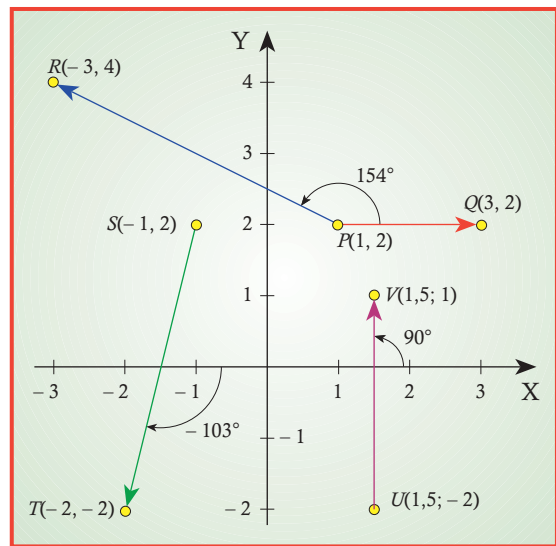


Fig. 7.6 Determina la dirección y magnitud de $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$, $\vec{ST}$ y $\vec{UV}$. Ejemplo 7.2.

Vector $\vec{PQ}$:

Dirección: forma un ángulo de 0° con el eje X.

Módulo: tiene una longitud de 2 cm y, por lo tanto:

$$|\vec{PQ}| = PQ = 2$$

Vector $\vec{PR}$:

Dirección: forma un ángulo de -154° con el eje X.

Módulo: $|\vec{PR}| = PR = 4,5$

Vector $\vec{ST}$:

Dirección: forma un ángulo de -103° con el eje X.

Módulo: $|\vec{ST}| = ST = 4,1$

Vector $\overrightarrow{UV}$:

Dirección: el vector forma un ángulo de 90° con el eje X.

Módulo: $|\overrightarrow{UV}| = UV = 3$

7.4 VECTORES OPUESTOS

Considera los vectores $\vec{ab}$ y $\vec{ba}$ de la fig. 7.7. Ambos tienen la misma longitud, es decir:

$$|\vec{ab}| = |\vec{ba}|$$

La inclinación de los dos vectores es la misma y por lo tanto tienen igual dirección. Sin embargo, $\vec{ab}$ apunta hacia arriba, mientras que $\vec{ba}$ apunta hacia abajo. Es decir, los dos vectores tienen sentidos opuestos.

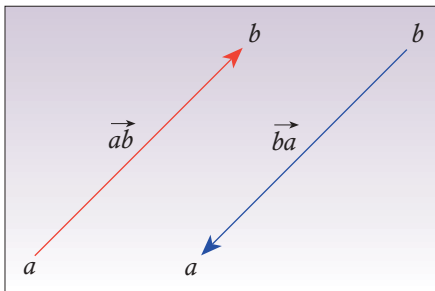


Fig. 7.7 Vectores opuestos.

*A los vectores de igual magnitud y dirección, pero de sentido contrario, se les denomina **vectores opuestos**.*

7.5 VECTORES PARALELOS Y VECTORES PERPENDICULARES

Dos vectores son paralelos si tienen la misma dirección.

Dos vectores son perpendiculares si forman un ángulo de 90° entre sí.

En la fig. 7.8 se presentan dos vectores paralelos y dos vectores perpendiculares.

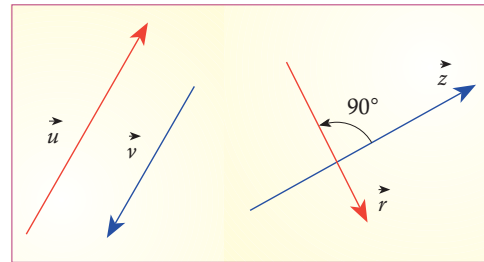


Fig. 7.8 Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos. Los vectores $\vec{r}$ y $\vec{z}$ son perpendiculares.

7.6 VECTOR NULO

Vector nulo es aquél cuya magnitud es igual a 0.

7.7 COMPONENTES DE UN VECTOR

Considera un vector $\overrightarrow{RP}$, fig. 7.9, en el plano cartesiano con las siguientes coordenadas:

$$R(x_1, y_1) \quad P(x_2, y_2)$$

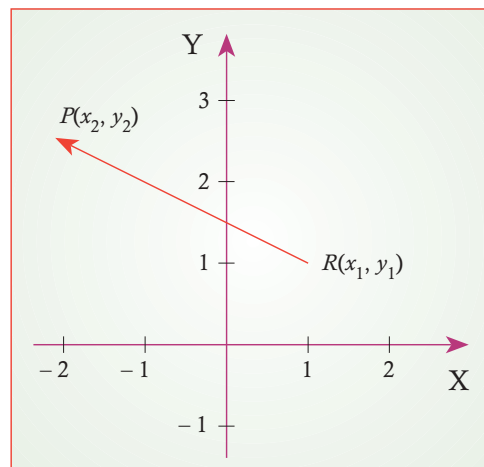


Fig. 7.9 Las componentes de un vector son las diferencias entre las abscisas y las ordenadas de sus extremos.

Las componentes del vector $\overrightarrow{RP}$ corresponden a las diferencias entre las abscisas y las ordenadas de sus puntos extremos. Entonces:

Componentes de $\vec{RP}$: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

lo que es equivalente a escribir:

$$\vec{RP}: \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

EJEMPLO 7.3

Se tiene un vector $\vec{PQ}$ cuyas coordenadas son: $P(-2, 2)$, $Q(1, -2)$. **a)** Dibuja el vector y determina su magnitud y dirección. **b)** Determina sus componentes. **c)** Dibuja un vector opuesto que pase por el punto $R(1, 0)$. **d)** Determina las coordenadas del vector opuesto. **e)** ¿Cuáles son las componentes del vector opuesto?

Solución

a) En la fig 7.10 se muestra el vector $\vec{PQ}$. De la figura se tiene:

$$PQ = 5 \text{ cm} \quad \alpha = -54^\circ$$

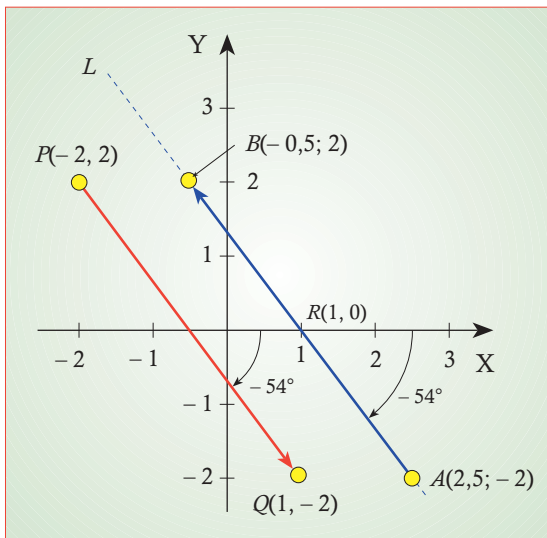


Fig. 7.10 Ejemplo 7.3.

b) Haciendo las diferencias de las coordenadas de sus extremos:

$$\text{Abscisas: } 1 - (-2) = 3$$

$$\text{Ordenadas: } -2 - 2 = -4$$

Entonces, $\vec{PQ}$ puede representarse como:

$$\vec{PQ} = \langle 3, -4 \rangle$$

c) Para dibujar el vector opuesto a $\vec{PQ}$, que pasa por el punto $R(1, 0)$, colocamos un transportador con el origen en R y medimos un ángulo de -54° ; esto determina la recta L mostrada en la fig. 7.10. Cualquier vector que apunte hacia arriba sobre la recta L y que tenga la misma magnitud de $\vec{PQ}$, es opuesto a éste. Entonces, el vector $\vec{AB}$, seleccionado en la fig. 7.10, es un vector opuesto a $\vec{PQ}$.

d) Las coordenadas del vector opuesto, de acuerdo con la fig. 7.10 son:

$$A(2,5; -2) \quad B(-0,5; 2)$$

e) De acuerdo con lo estudiado, las componentes del vector opuesto son:

$$\text{Abscisas: } -0,5 - 2,5 = -3$$

$$\text{Ordenadas: } 2 - (-2) = 4$$

Haz de notar que las componentes (x, y) del vector opuesto $\vec{AB}$ tienen las mismas magnitudes, pero signos contrarios, en relación con las componentes del vector $\vec{PQ}$. Esto es:

$$\vec{PQ} = \langle 3, -4 \rangle \quad \vec{AB} = \langle -3, 4 \rangle$$

Luego, podemos establecer:

Los vectores opuestos tienen sus componentes opuestas.



EJERCICIOS

7.1 Dibuja tres vectores de magnitud 5, 7, y 3 cm.

7.2 Dibuja los siguientes vectores:

- a) Magnitud: 3 cm. Dirección: norte.
- b) Magnitud: 5 cm. Dirección: sur.
- c) Magnitud: 2 cm. Dirección: noreste.
- d) Magnitud: 4 cm. Dirección: suroeste.

7.3 Representa en el plano cartesiano los vectores cuyos orígenes y extremos se dan:

a) Vector $\vec{ab}$:

origen: $P(0, 0)$ extremo: $P(1, 4)$

b) Vector $\vec{z}$:

origen: $P(1, 1)$ extremo: $P(2, 4)$

c) Vector $\vec{mn}$:

origen: $P(0, 3)$ extremo: $P(-1, -2)$

d) Vector $\vec{u}$:

origen: $P(-3, 0)$ extremo: $P(0, -3)$

7.4 Dadas las siguientes coordenadas:

$P(0, 0)$ $Q(2, -3)$ $R(-3, -4)$

$S(3, 0)$ $T(0, -4)$

dibuja los vectores $\vec{PQ}$, $\vec{QP}$, $\vec{PR}$, $\vec{QS}$, $\vec{TQ}$ y $\vec{SP}$ y determina el módulo y dirección de dichos vectores.

7.5 Se tiene un vector cuyas coordenadas son:

$P(1, 2)$ $Q(-3, -2)$

a) Dibuja el vector $\vec{PQ}$ y determina su magnitud y dirección. b) Determina sus componentes. c) Dibuja un vector opuesto a $\vec{PQ}$ que pase por el punto $R(-2, 0)$. d) Determina las coordenadas del vector opuesto. e) ¿Cuáles son las componentes del vector opuesto?

8

VECTORES EQUIPOLENTES

8.1 VECTORES EQUIPOLENTES

Vectores equipolentes son aquellos que tienen igual magnitud, dirección y sentido.

En la fig. 8.1 se presentan dos pares de vectores equipolentes. Es decir, los vectores $\vec{ab}$ y $\vec{cd}$ son equipolentes por tener la misma longitud, dirección y sentido. Lo mismo se aplica a los vectores $\vec{mn}$ y $\vec{pq}$. Los vectores equipolentes se relacionan mediante el símbolo $\sim$. De esta manera, podemos escribir para la fig. 8.1:

$$\vec{ab} \quad \vec{cd} \quad \vec{mn} \sim \vec{pq}$$

Los vectores equipolentes tienen las mismas componentes.

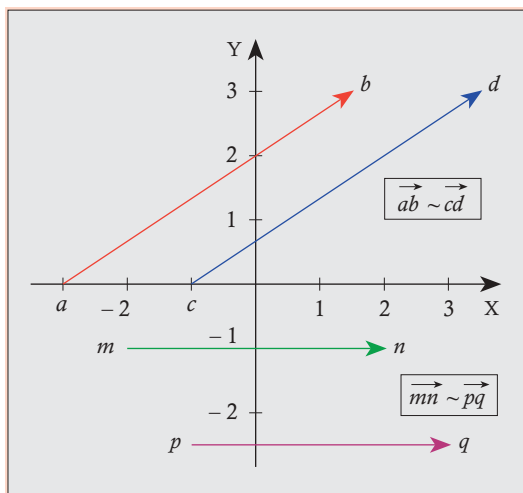


Fig. 8.1 $\vec{ab}$ y $\vec{cd}$ son vectores equipolentes. También $\vec{mn}$ y $\vec{pq}$ son vectores equipolentes.

Así, por ejemplo, de la fig. 8.1 podemos escribir:

Vector $\vec{ab}$:

Coordenadas del extremo: $P(1,5; 3)$

Coordenadas del origen: $P(-3, 0)$

Componentes: $[1,5 - (-3); 3 - 0] = (4,5; 3)$

Vector $\vec{cd}$:

Coordenadas del extremo: $P(3,5; 3)$

Coordenadas del origen: $P(-1, 0)$

Componentes: $[3,5 - (-1); 3 - 0] = (4,5; 3)$

Luego:

$$\vec{ab} : \langle 4,5; 3 \rangle \quad \vec{cd} : \langle 4,5; 3 \rangle$$

Vector $\vec{mn}$:

Coordenadas del extremo: $P(2, -1)$

Coordenadas del origen: $P(-2, -1)$

Componentes: $\langle 4, 0 \rangle$

Vector $\vec{pq}$:

Coordenadas del extremo: $P(3, -2,5)$

Coordenadas del origen: $P(-1; -2,5)$

Componentes: $\langle 4, 0 \rangle$

Luego:

$$\vec{mn} : \langle 4, 0 \rangle \quad \vec{pq} : \langle 4, 0 \rangle$$

8.2 IDENTIFICACIÓN GEOMÉTRICA DE VECTORES EQUIPOLENTES

Considera los vectores $\vec{u}$, $\vec{z}$, $\vec{r}$, y $\vec{s}$ de la fig. 8.2. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{z}$ son vectores equipolentes, mientras que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$ no son equipolentes.

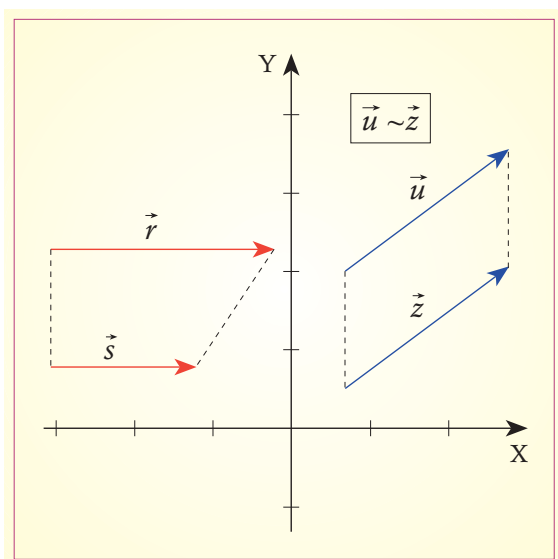


Fig. 8.2 Al unir los orígenes y extremos de vectores equipolentes, se obtiene un paralelogramo.

Si unimos los orígenes y los extremos de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{z}$, se forma un paralelogramo, mientras que al unir los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$, se forma un trapecio. En general, podemos establecer la siguiente regla para reconocer cuándo dos vectores son equipolentes:

Al unir los orígenes y los extremos de vectores equipolentes, se forma un paralelogramo.

8.3 TRAZADO DE UN VECTOR EQUIPOLLENTE A OTRO VECTOR DADO

En la fig. 8.3 se muestra el vector $\vec{mn}$ de magnitud 4 cm y dirección $\alpha = 45^\circ$. Para dibujar un vector equipolente a $\vec{mn}$, se debe trazar una recta paralela a dicho vector. Por ejemplo, podemos trazar una recta L paralela al vector $\vec{mn}$ que pase por el punto $P(1, 0)$. Cualquier vector con el mismo sentido y magnitud de $\vec{mn}$ que descansa sobre la recta L será equipolente con el mismo. Así, el vector $\vec{rs}$ es equipolente con el vector $\vec{mn}$.

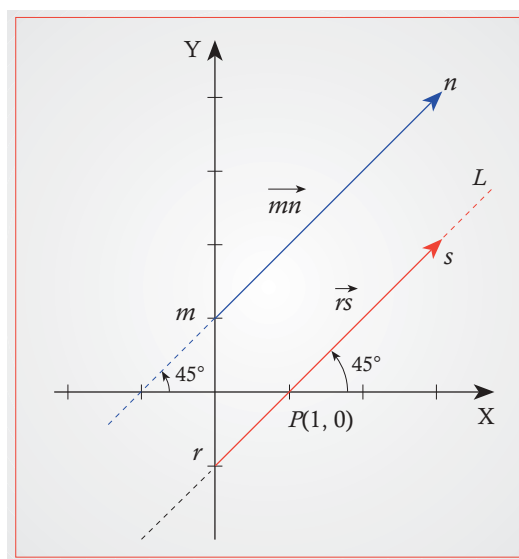


Fig. 8.3 Trazado de un vector equipolente al vector $\vec{mn}$.

EJEMPLO 8.1

Dado el vector $\vec{P_1P_2}$ cuyo origen y extremo son los puntos $P_1(-2, 0)$ y $P_2(1, 3)$, representa un vector equipolente al mismo que tenga su origen en $P_3(0, 0)$. Demuestra que esos vectores son equipolentes de manera gráfica y hallando sus componentes.

Solución

En la fig. 8.4 se muestra el vector $\vec{P_1P_2}$ con origen en $P_1(-2, 0)$ y extremo en $P_2(1, 3)$. Para dibujar un vector equipolente que pase por el punto $P(0, 0)$, trazamos una recta L paralela al vector $\vec{P_1P_2}$ que pasa por ese punto. Sobre la recta L , dibujamos el vector $\vec{P_3P_4}$ con origen en $P_3(0, 0)$ y con la magnitud y sentido del vector dado. De acuerdo con la fig. 8.4, se observa que las coordenadas de P_4 son $(3, 3)$.

Gráficamente se puede ver que los vectores $\vec{P_1P_2}$ y $\vec{P_3P_4}$ son equipolentes, porque al unir sus extremos y sus orígenes, se forma un paralelogramo.

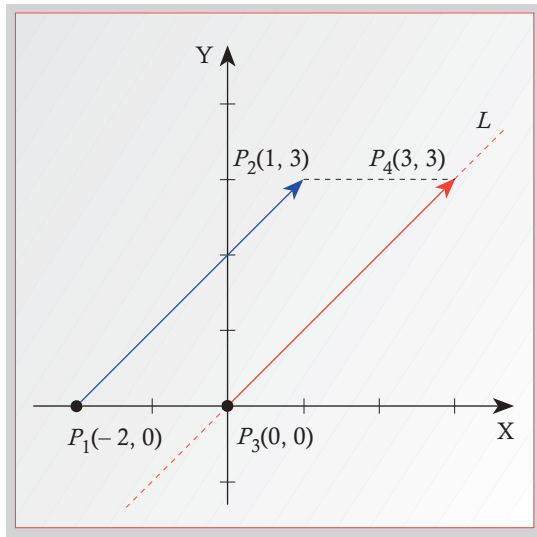


Fig. 8.4 Representación de un vector equipolente a $\vec{P_1P_2}$ y que tiene su origen en $P_3(0, 0)$. Ejemplo 8.1.

Las componentes de $\vec{P_1P_2}$:

$$\langle 1 - (-2), (3 - 0) \rangle \Rightarrow \vec{P_1P_2} : \langle 3, 3 \rangle$$

Las componentes de $\vec{P_3P_4}$:

$$\langle 3 - 0, (3 - 0) \rangle \Rightarrow \vec{P_3P_4} : \langle 3, 3 \rangle$$

Luego, podemos escribir:

$$\vec{P_1P_2} \sim \vec{P_3P_4}$$

EJEMPLO 8.2

¿Dónde debe colocarse un punto cualquiera x , en la fig. 8.5, de manera que $\vec{xy} \sim \vec{ab}$.

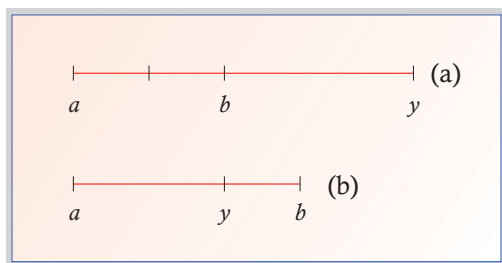


Fig. 8.5 Ejemplo 8.2.

Solución

Para que $\vec{xy} \sim \vec{ab}$, es necesario que ambos vectores tengan igual magnitud y el mismo sentido. En el caso (a), el vector $\vec{ab}$ tiene una magnitud de 2 unidades y apunta hacia la derecha, tal como se muestra en la fig. 8.6. Luego, el vector $\vec{xy}$ debe apuntar también hacia la derecha y tener dos unidades.

En el caso (b), el vector $\vec{ab}$ tiene 3 unidades y apunta hacia la derecha.

También el vector $\vec{xy}$ tendrá 3 unidades y apuntará hacia la derecha. En la fig. 8.6 se muestra la solución. En este último caso, es necesario extender el segmento hacia la izquierda del punto a para poder localizar el origen del vector $\vec{xy}$.

EJEMPLO 8.3

Se tiene un vector $\vec{u}$ cuyas componentes son $\langle 1, 3 \rangle$. Determina un vector equipolente con $\vec{u}$ que tenga su origen en el punto $P_1(0, -1)$.

Solución

Llamemos $\vec{z}$ al vector equipolente a $\vec{u}$. Se puede escribir:

$$\vec{u} = \langle 1, 3 \rangle$$

Si denotamos por $P_2(x, y)$ las coordenadas del extremo de $\vec{z}$ y, dado que las coordenadas del origen del vector son $P_1(0, -1)$, tendremos:

$$\vec{z} : [(x - 0), y - (-1)] \Rightarrow \vec{z} : (x, y + 1)$$

Para que $\vec{z} \sim \vec{u}$, sus componentes deben ser iguales. Por lo tanto:

$$x = 1 \quad y + 1 = 3 \Rightarrow y = 3 - 1 \Rightarrow y = 2$$

Entonces, el vector $\vec{z}$, cuyo origen y extremo tienen coordenadas $P_1(0, -1)$ y $P_2(1, 2)$, es equipolente con el vector $\vec{u}$ de componentes $\langle 1, 3 \rangle$. En la fig. 8.7, se ha dibujado el vector $\vec{z}$. Cualquier vector que esté sobre una recta paralela a $\vec{z}$, y

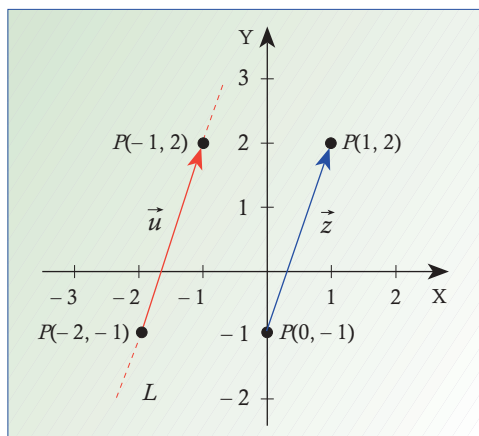


Fig. 8.6 Solución al ejemplo 8.2.

cuyas componentes sean $\langle 1, 3 \rangle$, es representativo del vector $\vec{u}$. En la fig. 8.7 se eligió un vector $\vec{u}$ de origen $P(-2, -1)$ y extremo $P(-1, 2)$.



8.1 Responde como ciertas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifica tu respuesta cuando sea necesario:

a. Dos vectores equipolentes tienen igual magnitud. **b.** Si dos vectores tienen igual magnitud son equipolentes. **c.** Dos vectores opuestos no pueden ser equipolentes. **d.** Dos vectores paralelos son equipolentes. **e.** Si dos vectores forman un trapecio al unir sus orígenes y sus extremos, no pueden ser equipolentes.

8.2 Establece si los vectores cuyos orígenes (O) y extremos (E) se dan son equipolentes. Dibuja los vectores en un plano cartesiano.

- a) Vector $\vec{P_1P_2}$: O: $P_1(0, 0)$ E: $P_2(3, 2)$
 Vector $\vec{P_3P_4}$: O: $P_3(1, -2)$ E: $P_4(4, 0)$

- b) Vector $\vec{u}$: O: $P(-2, 0)$ E: $P(0, 1)$
 Vector $\vec{z}$: O: $P(1, -1)$ E: $P(0, 0)$
 c) Vector $\vec{u}$: O: $P(2, -2)$ E: $(2, 0)$
 Vector $\vec{z}$: O: $P(-1, 1)$ E: $(-1, 3)$

8.3 Verifica, usando el hecho que vectores equipolentes forman un paralelogramo, si los siguientes vectores son equipolentes:

- a) Vector $\vec{u}$ O: $P(3, 0)$ E: $P(0, 0)$
 Vector $\vec{z}$ O: $P(1, 3)$ E: $P(-2, 3)$
 b) Vector $\vec{u}$ O: $P(1, 2)$ E: $P(3, 4)$
 Vector $\vec{z}$ O: $P(1; 0,5)$ E: $P(3; 2,5)$
 c) Vector $\vec{u}$ O: $P(-3,5; 1)$ E: $P(-1,5; 1)$
 Vector $\vec{z}$ O: $P(-3,5; 2,5)$ E: $P(-0,5; 2,5)$

8.4 Dado el vector $\vec{P_1P_2}$ cuyo origen y extremo son los puntos $P_1(-2, 0)$ y $P_2(0, 3)$, representa un vector equipolente al mismo que tenga su origen en $P_3(1, 0)$.

8.5 ¿Dónde deberían estar situados los puntos x en la fig. 8.8, de manera que $\vec{xy} \sim \vec{ab}$?

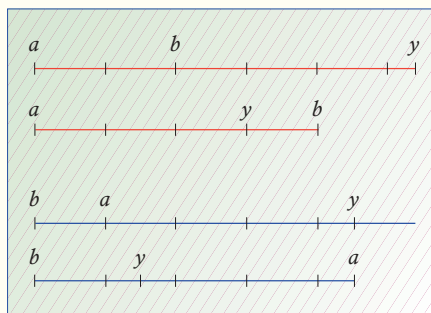


Fig. 8.8 Ejercicio 8.6.

8.6 Se tiene un vector cuyas componentes son $(2, 3)$. Determina un vector equipolente al mismo que tenga su origen en $P(0, 0)$. Dibuja ambos vectores.

8.7 Se tiene un vector cuyas componentes son $(1, 6)$. Determina un vector equipolente que tenga su extremo en $P(-1, 2)$. Dibuja ambos vectores.

9

ADICIÓN DE VECTORES

9.1 ADICIÓN DE VECTORES DE ORIGEN COMÚN

En la fig. 9.1 se observa un objeto que va a ser sometido a dos fuerzas que tienen distintas direcciones y magnitudes. Cada una de estas fuerzas puede ser representada por un vector. En este caso, tendremos los vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Ambos vectores están aplicados a un mismo punto, P , del objeto. Es decir, tienen el mismo origen.

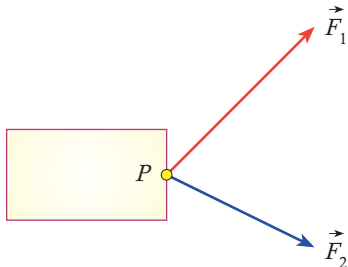


Fig. 9.1 $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son vectores que representan fuerzas aplicadas en un mismo punto de un objeto.

¿Será posible reemplazar las dos fuerzas por una sola que produzca el mismo efecto? Sí es posible, y a tal fuerza se le denomina *fuerza resultante*, mientras que al vector que la representa se le llama *vector suma* o *vector resultante*. Para determinar el vector suma, podemos utilizar los siguientes métodos:

a) **Método del paralelogramo:** se dibuja un paralelogramo que tenga como lados los vectores dados. La diagonal del paralelogramo corresponde a la magnitud del vector resultante. El vector resultante, $\vec{R}$, tiene como origen el punto P , común a $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, y su extremo es el extremo de la diagonal. El método se ilustra en la fig. 9.2.

b) **Método del vector equipolente:** por el extremo del vector $\vec{F}_1$ se dibuja un vector equipolente al

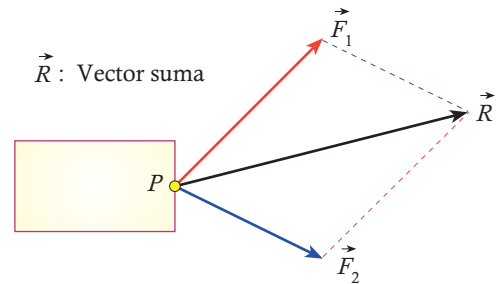


Fig. 9.2 Método del paralelogramo para determinar el vector suma de dos vectores con el mismo origen.

vector $\vec{F}_2$ (o viceversa) y se une el punto P , origen común de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, con el extremo del vector equipolente. El vector, así formado, con origen en P y el mismo extremo del vector equipolente, es el vector suma. La fig. 9.3 muestra el procedimiento.

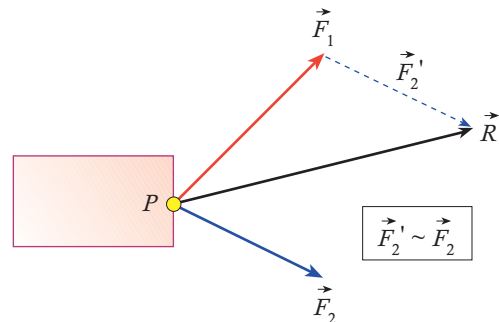


Fig. 9.3 Método del vector equipolente para determinar el vector suma de dos vectores con el mismo origen.

EJEMPLO 9.1

Se tienen dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con origen en el punto $P(0, 0)$ y con extremos en $P(2, 1)$ y $P(-1, 2)$ respectivamente. Determina el módulo y dirección del vector suma $\vec{R}$. Usa el método del paralelogramo.

Solución

En la fig. 9.4 se dibujan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

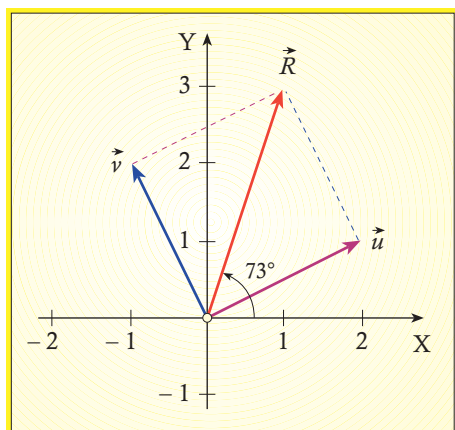


Fig. 9.4 Ejemplo 9.1.

Para hallar el vector resultante, $\vec{R}$, se dibuja el paralelogramo que tiene como lados a las longitudes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. El vector suma descansa sobre la diagonal de este paralelogramo. Uniendo el origen con el extremo de la diagonal, obtenemos $\vec{R}$. Para hallar la magnitud de $\vec{R}$, medimos la longitud de la diagonal:

$$|\vec{R}| = R = 3,1 \text{ cm}$$

Para determinar la dirección de $\vec{R}$, medimos el ángulo agudo que forma dicho vector con el eje de las X. Si llamamos este ángulo α , de la figura 9.4 se tiene:

$$\alpha = 73^\circ$$

EJEMPLO 9.2

Se tienen dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con un origen común en el punto $P(-1, -1)$. Los extremos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $P(-1, 2)$ y $P(2, 1)$, respectivamente. Determina el módulo y la dirección del vector suma, $\vec{R}$, usando el método del vector equipolente.

Solución

En la fig. 9.5 se muestran los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el plano cartesiano. A fin de determinar el vector suma, $\vec{R}$, dibujamos un vector $\vec{v}'$ equipolente a $\vec{v}$ ($\vec{v} \sim \vec{v}'$) con origen en el extremo del vector $\vec{u}$. Uniendo el origen común de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con el extremo de $\vec{v}'$, se obtiene $\vec{R}$.

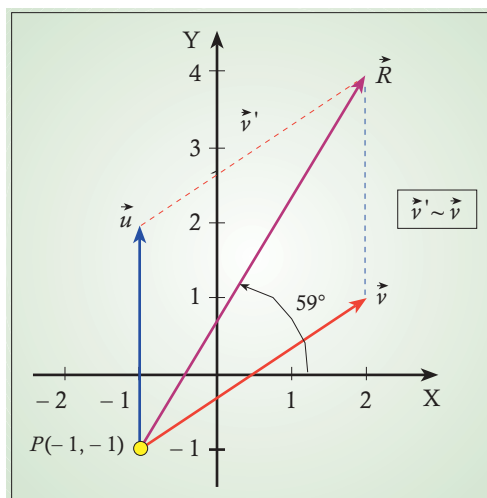


Fig. 9.5 Ejemplo 9.2.

De la fig. 9.5, se puede hallar la magnitud y dirección de $\vec{R}$:

$$|\vec{R}| = R = 5,8 \text{ cm}$$

Dirección: $\vec{R}$ forma un ángulo $\alpha = 59^\circ$ con el eje de las X.

9.2 ADICIÓN DE VECTORES DE DISTINTOS ORÍGENES

Considera ahora los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la fig. 9.6(a). Como puedes observar, ambos vectores tienen orígenes distintos. Para efectuar la adición de los mismos, fig. 9.6(b), se procede de la manera siguiente:

1. A partir del extremo del vector $\vec{u}$, se dibuja un vector $\vec{v}'$ equipolente con $\vec{v}$.

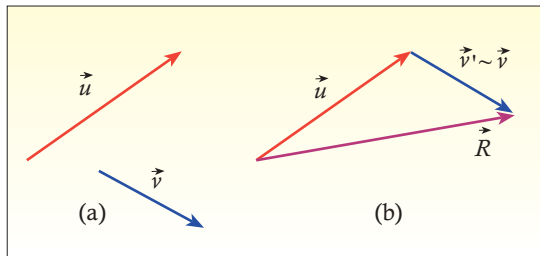


Fig. 9.6 Adición de vectores de distintos orígenes.

2. Se une el origen del vector $\vec{u}$, con el extremo del vector $\vec{v}'$. El vector resultante, $\vec{R}$, corresponde al vector suma de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

EJEMPLO 9.3

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen orígenes y extremos dados por:

$$\begin{aligned}\vec{u}: & \text{origen: } (-2, 1) \quad \text{extremo: } (1, 3) \\ \vec{v}: & \text{origen: } (-2, 2) \quad \text{extremo: } (0, 0)\end{aligned}$$

Determina el vector suma resultante, $\vec{R} = \vec{u} + \vec{v}$.

Solución

En la fig. 9.7 se muestran los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. El vector $\vec{v}'$ es equipolente al vector $\vec{v}$. El vector suma, $\vec{R}$, se obtiene dibujando $\vec{v}'$ en el extremo

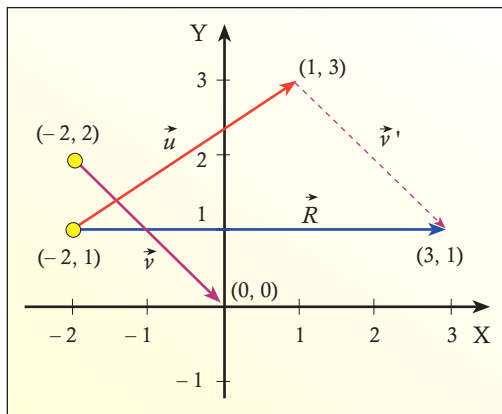


Fig. 9.7 Ejemplo 9.3.

de $\vec{u}$. Luego, se une el origen de $\vec{u}$, punto $(-2, 1)$, con el extremo de $\vec{v}'$. El vector, así obtenido, corresponde a $\vec{R}$:

$$\vec{R}: \text{origen: } P(-2, 1) \quad \text{extremo: } P(3, 1)$$

En término de sus componentes, podemos escribir:

$$\vec{R}: \langle [3 - (-2)], (1, -1) \rangle \Rightarrow \vec{R} = \langle 5, 0 \rangle$$

EJEMPLO 9.4

Para los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del ejemplo anterior, determina la suma $\vec{M} = \vec{v} + \vec{u}$. ¿Cómo comparas esta suma con el vector $\vec{R}$ del ejemplo 9.3?

Solución

En la fig. 9.8 se representan nuevamente los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

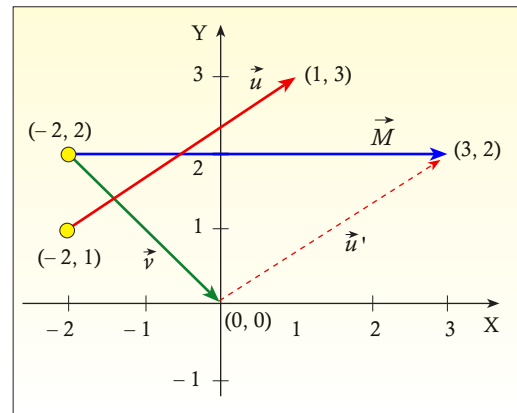


Fig. 9.8 Ejemplo 9.4.

El vector resultante, $\vec{M}$, se obtiene, ahora, dibujando un vector $\vec{u}'$ equipolente a $\vec{u}$ por el extremo de $\vec{v}$. Al unir el origen de $\vec{v}$ con el extremo de $\vec{u}'$, determinamos $\vec{M}$. Para $\vec{M}$ se tiene:

$$\vec{M}: \text{origen: } P(-2, 2) \quad \text{extremo: } P(3, 2)$$

Como puedes observar en la fig. 9.8, el vector $\vec{M}$ obtenido no tiene iguales ni el extremo ni el origen del vector $\vec{R}$ del ejercicio anterior. Si embargo, si expresamos a $\vec{M}$ mediante sus componentes, tendremos:

$$\vec{M} : \left\langle \left[3 - (-2) \right], (1, -1) \right\rangle \Rightarrow \vec{M} = \langle 5, 0 \rangle$$

lo que significa que $\vec{M} \sim \vec{R}$.

9.3 ADICIÓN DE VECTORES DE IGUAL DIRECCIÓN Y SENTIDO

Este es un caso particular, de los dos discutidos anteriormente. En la fig. 9.9 se presentan dos situaciones distintas: en la fig. 9.9(a), el vector $\vec{u}$ tiene como magnitud a la longitud ab , mientras que el vector $\vec{v}$ tiene como magnitud a la longitud del segmento cd . Para determinar la suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, dibujamos un vector $\vec{u}' \sim \vec{u}$ a partir del extremo de $\vec{v}$. Se obtiene así el vector $\vec{R} = \vec{v} + \vec{u}$.

En la fig. 9.9(b) se lleva el vector $\vec{v}' \sim \vec{v}$ al extremo

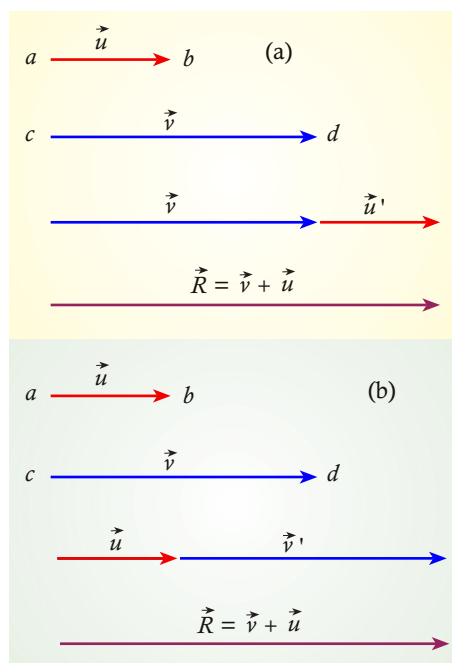


Fig. 9.9 Adición de vectores de igual dirección y sentido.

del vector $\vec{u}$ para obtener el vector suma $\vec{R} = \vec{u} + \vec{v}$.

9.4 ADICIÓN DE VECTORES DE IGUAL DIRECCIÓN Y SENTIDOS CONTRARIOS

En la fig. 9.10(a) se indican los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de dirección igual y sentidos contrarios.

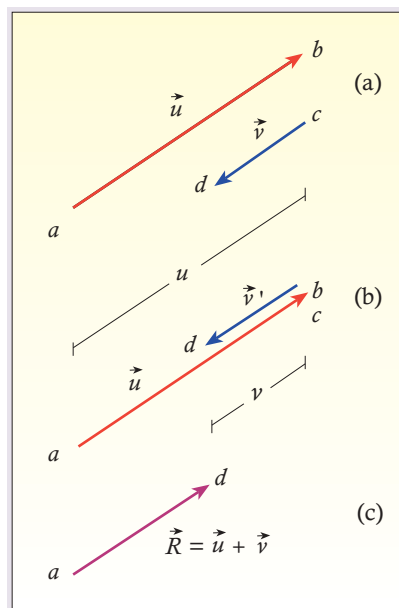


Fig. 9.10 Adición de vectores de igual dirección y sentidos contrarios.

Para efectuar su adición, se procede de la siguiente manera:

- Se toma un vector $\vec{v}'$ equipolente con $\vec{v}$ ($\vec{v}' \sim \vec{v}$) y se lleva hasta el extremo del vector $\vec{u}$, fig. 9.10(b).
- El vector suma, $\vec{R}$, corresponde al vector que se forma entre el origen de $\vec{u}$ (punto a) y el extremo de $\vec{v}'$ (punto d). Este se muestra en la fig. 9.10(c).

9.5 DETERMINACIÓN DE LOS VECTORES QUE FORMAN UN VECTOR SUMA

Dado un vector suma, $\vec{R}$, es posible determinar

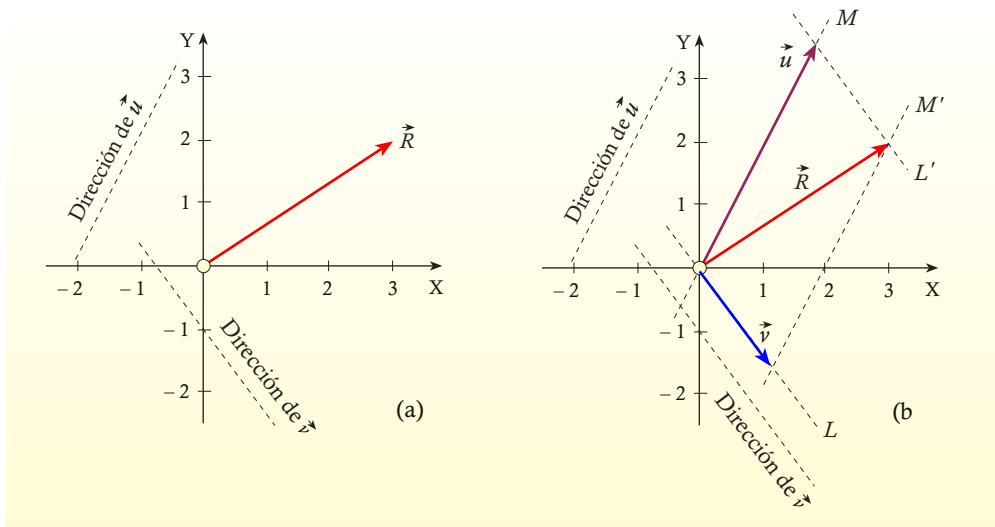


Fig. 9.11 Determinación de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que forman al vector $\vec{R}$, conocidas las direcciones de los primeros.

los vectores sumandos que lo originaron si se conoce la dirección de estos últimos. En la fig. 9.11(a) se conocen el vector $\vec{R}$, resultante de la suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y las direcciones de estos últimos vectores. Para determinar $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se procede de la siguiente manera (ver fig. 9.11(b)):

1. Por el origen y el extremo de $\vec{R}$, se dibujan las rectas M y M' paralelas a la dirección de $\vec{u}$.
2. Por el origen y el extremo de $\vec{R}$, se dibujan las rectas L y L' paralelas a la dirección de $\vec{v}$.
3. La intersección de las rectas M y L' determina el extremo del vector $\vec{u}$. El origen de $\vec{u}$ es el origen de $\vec{R}$.
4. La intersección de las rectas M' y L determina el extremo del vector $\vec{v}$. El origen de $\vec{v}$ es el mismo origen de $\vec{R}$.

vectores están definidos mediante sus componentes, es también posible realizar una adición analítica de los mismos. Considera los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ expresados por sus componentes:

$$u: \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle \quad v: \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

El vector suma, $\vec{S}$, se puede expresar como:

$$\vec{S} = \vec{u} + \vec{v} = \langle \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rangle \quad (9.1)$$

EJEMPLO 9.5

Se tienen los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyos orígenes y extremos son:

$$\begin{array}{lll} \vec{u} & \text{origen: } P(-2; 1,5) & \text{extremo: } P(0, 3) \\ \vec{v} & \text{origen: } P(-2; 1,5) & \text{extremo: } P(1, -1) \end{array}$$

Determina gráficamente la operación $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v}$ y compara este resultado con el que se obtiene al efectuar la adición analítica.

Solución

9.6 ADICIÓN ANALÍTICA DE VECTORES

En las secciones anteriores hemos desarrollado métodos gráficos para sumar vectores. Si dos

En la fig. 9.12 se muestran los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Ambos vectores tienen el mismo origen. Mediante el método del paralelogramo, podemos obte-

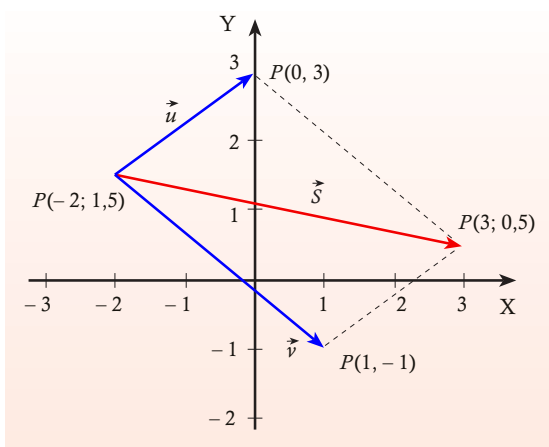


Fig. 9.12 Ejemplo 9.5.

ner el vector suma $\vec{S}$. El vector $\vec{S}$ tiene su origen en el punto $P(-2; 1,5)$ y su extremo en el punto $P(3; 0,5)$ y se puede expresar como:

$$\vec{S} : \langle 5, -1 \rangle$$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son:

$$\vec{u} : \langle 2; 1,5 \rangle \quad \vec{v} = \langle 3; -2,5 \rangle$$

Si sumamos analíticamente $\vec{u}$ y $\vec{v}$, obtenemos:

$$\vec{S} = \vec{u} + \vec{v} = \langle 2 + 3; 1,5 - 2,5 \rangle$$

Es decir:

$$\vec{S} = \vec{u} + \vec{v} = \langle 5, -1 \rangle$$

que es el mismo resultado obtenido gráficamente.



9.1 Usa el método del paralelogramo para determinar la adición de los vectores señalados en la fig. 9.13.

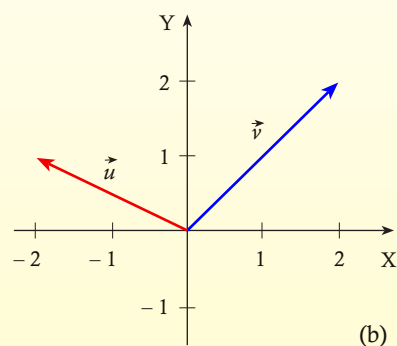
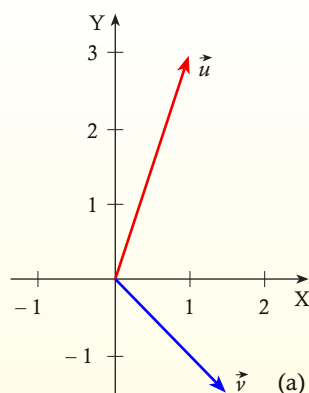


Fig. 9.13 Determina la suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Ejercicio 9.1.

9.2 Usa el método del paralelogramo para determinar la adición de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, cuyos orígenes y extremos son:

- a) $\vec{u}$ origen: $P(0, 0)$ extremo: $P(-2, 1)$
 $\vec{v}$ origen: $P(0, 0)$ extremo: $P(2, 2)$
- b) $\vec{u}$ origen: $P(1, 1)$ extremo: $P(-2, 1)$
 $\vec{v}$ origen: $P(1, 1)$ extremo: $P(1, 1)$
- c) $\vec{u}$ origen: $P(-1, 1)$ extremo: $P(1, 2)$
 $\vec{v}$ origen: $P(-1, 1)$ extremo: $P(0, -1)$

9.3 Usa el método del vector equipolente para determinar la adición de los vectores de origen común indicados en la fig. 9.14.

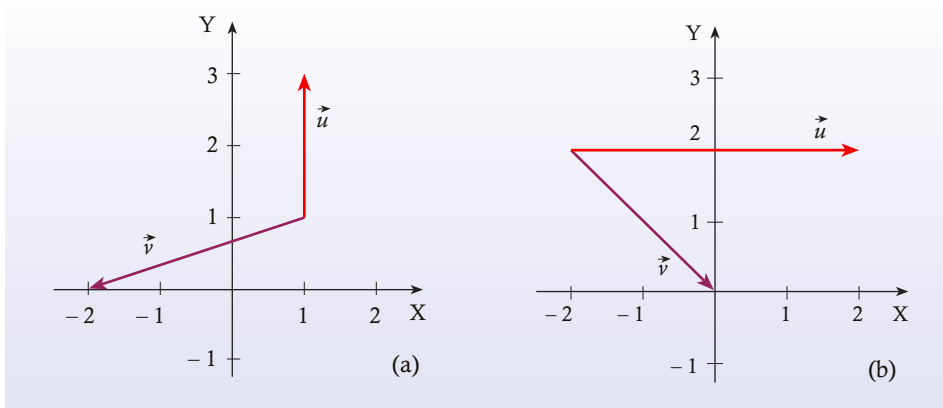


Fig. 9.14 Usa el método del vector equipolente para determinar la suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Ejercicio 9.3.

9.4 Efectúa la adición de los vectores cuyos orígenes y extremos se especifican:

- a) $\vec{u}$ origen: $P(0, 0)$ extremo: $P(3, 2)$
 $\vec{v}$ origen: $P(0, 2)$ extremo: $P(-1, 0)$
- b) $\vec{u}$ origen: $P(-2, 0)$ extremo: $P(0, 0)$
 $\vec{v}$ origen: $P(2, 0)$ extremo: $P(-1, 3)$
- c) $\vec{u}$ origen: $P(-1, -2)$ extremo: $P(2, -1)$
 $\vec{v}$ origen: $P(-1, -2)$ extremo: $P(-1, -1)$

9.5 Efectúa la adición de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyos orígenes y extremos están dados por:

- a) $\vec{u}$ origen: $P(2, 2)$ extremo: $P(-2, 0)$
 $\vec{v}$ origen: $P(1, 0)$ extremo: $P(1, 1.5)$
- b) $\vec{u}$ origen: $P(0, 0)$ extremo: $P(3, 0)$
 $\vec{v}$ origen: $P(-1, 0)$ extremo: $P(-1, 2)$
- c) $\vec{u}$ origen: $P(-1, 0)$ extremo: $P(2, 1)$
 $\vec{v}$ origen: $P(-1, -1.5)$ extremo: $P(-1, 2)$

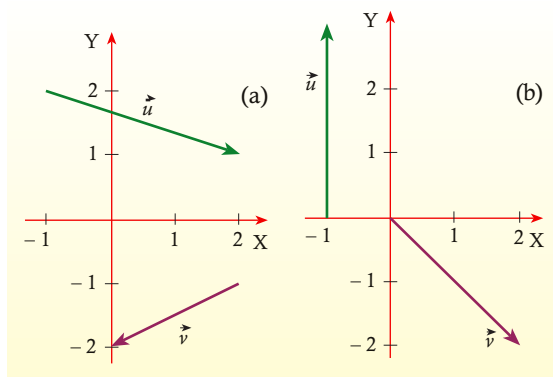


Fig. 9.15 Ejercicio 9.6

9.6 Dibuja el vector suma $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v}$ para la fig. 9.15.

9.7 Determina analíticamente la adición de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dados por sus componentes. Demuestra que la respuesta es la misma que en la solución gráfica.

- a) $\vec{u}$ origen: $P(0, 0)$ extremo: $P(2, 0)$
 $\vec{v}$ origen: $P(-1, 1)$ extremo: $P(-2, 3)$
- b) $\vec{u}$ origen: $P(2, 1)$ extremo: $P(-1, -1)$
 $\vec{v}$ origen: $P(1, 0)$ extremo: $P(-1, 2)$

9.8 Efectúa la adición de los vectores de la fig. 9.16.

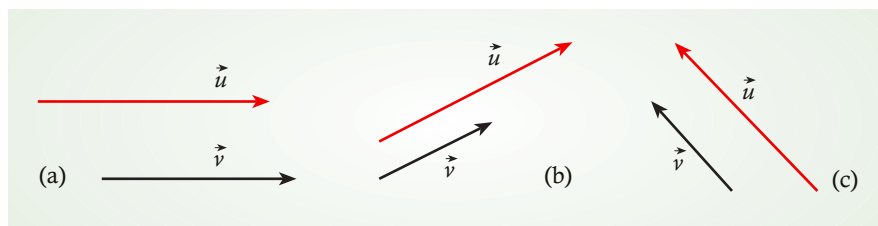


Fig. 9.16 Ejercicio 9.8.

9.9 Efectúa la adición de los vectores de la fig. 9.17.

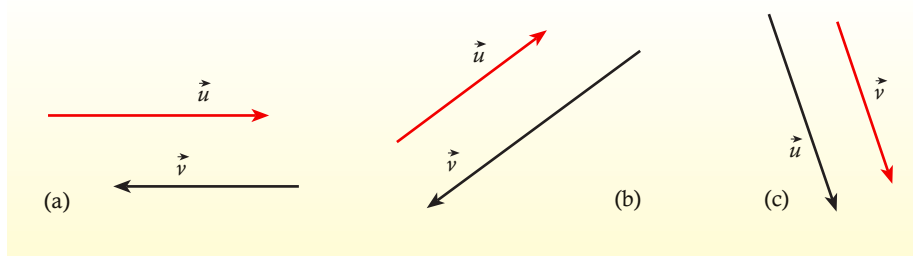


Fig. 9.17 Ejercicio 9.9.

9.10 Determina los vectores que forman al vector suma $\vec{S}$ de la fig. 9.18.

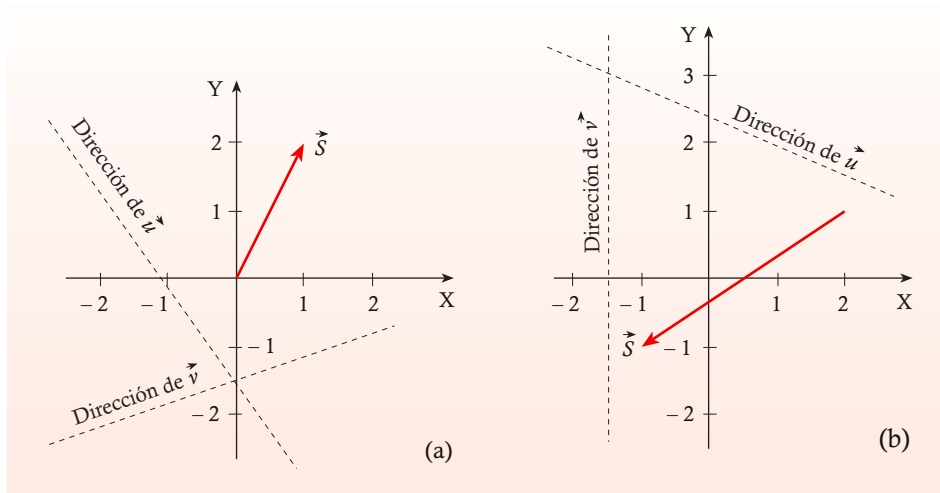


Fig. 9.18 Ejercicio 9.10.

10

ADICIÓN DE VECTORES:
PROPIEDADES

10.1 PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA ADICIÓN DE VECTORES

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se verifica:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad (10.1)$$

Visualizaremos la propiedad conmutativa, haciendo uso de la fig. 10.1.

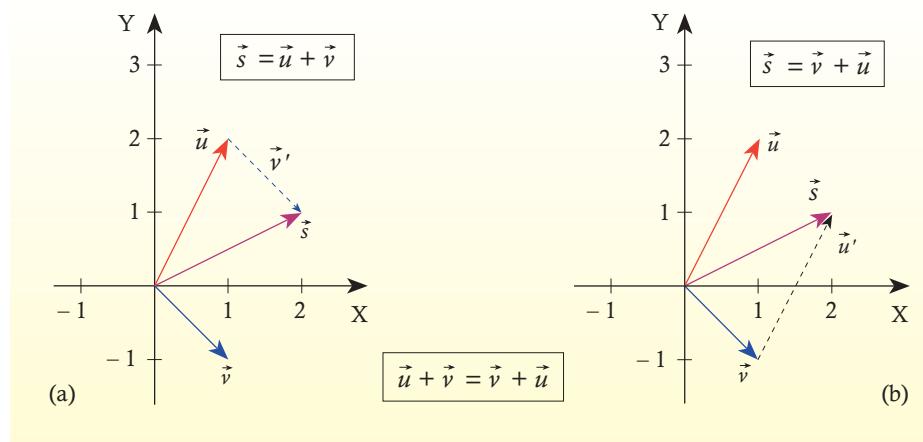


Fig. 10.1 Propiedad conmutativa de la adición de vectores con iguales orígenes.

En la fig. 10.1(a) se ha efectuado la adición $\vec{u} + \vec{v}$. Para ello, se ha hecho uso del vector $\vec{v}'$ equipolente al vector $\vec{v}$ ($\vec{v}' \sim \vec{v}$). En la fig. 10.1(b) se ha efectuado la adición $\vec{v} + \vec{u}$. En este caso, utilizamos el vector $\vec{u}' \sim \vec{u}$. El resultado, como puedes observar de la fig. 10.1, es, en ambos casos, el mismo.

El caso anterior se refiere a vectores que tienen un origen común. Cuando los vectores tienen distintos orígenes, los resultados de las operaciones $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{v} + \vec{u}$ se obtienen mediante vectores equipolentes. En la fig. 10.2 se muestra este caso.

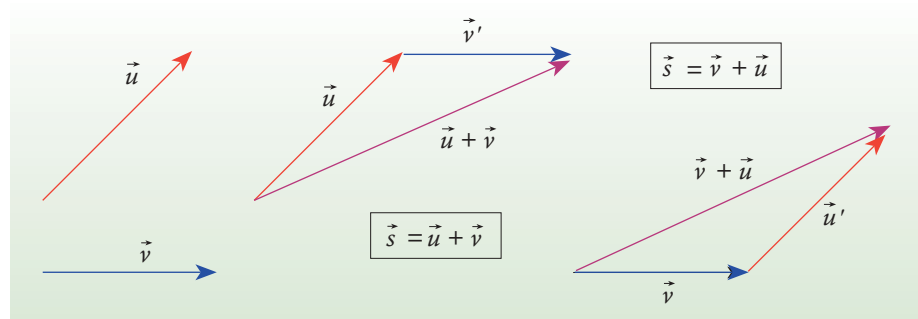


Fig. 10.2 Propiedad conmutativa de la adición de vectores con distintos orígenes.

10.2 PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA ADICIÓN DE VECTORES

Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, se cumple:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \quad (10.2)$$

Esta es la propiedad asociativa de la adición de vectores. Si (10.2) es cierta, usualmente se escribe:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \quad (10.3)$$

donde el signo de equipolencia ($\sim$) se sustituyó por el de igualdad ($=$). La relación (10.3) nos dice que en la adición de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, podemos sumar $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y al resultado sumarle $\vec{w}$ o sumar $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y al resultado sumarle $\vec{u}$. La propiedad asociativa de la adición de vectores puede visualizarse observando la fig. 10.3.

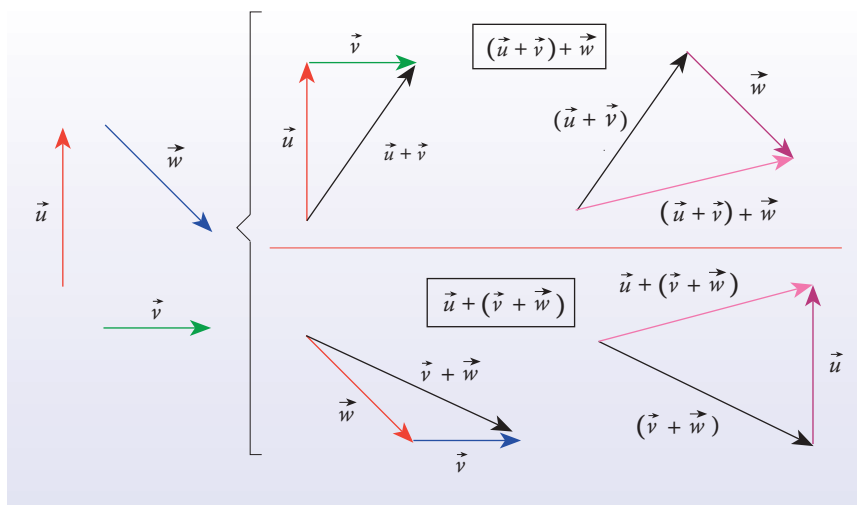


Fig. 10.3 Propiedad asociativa de la adición de vectores.

10.3 EL ELEMENTO NEUTRO DE LA ADICIÓN DE VECTORES

Cuando el extremo de un vector coincide con su origen, se dice que ese vector es nulo. El vector nulo se puede describir así:

$$\text{Vector nulo} \begin{cases} \text{Representación: } \vec{0} \\ \text{Componentes: } \langle 0, 0 \rangle \end{cases}$$

El vector nulo es el elemento neutro de la adición de vectores, porque sumado a cualquier otro vector, el resultado es este último:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad (10.4)$$

10.4 EL ELEMENTO SIMÉTRICO U OPUESTO DE UN VECTOR DADO

En la sección 7.4 establecimos que a los vectores de igual magnitud y dirección, pero de sentido contrario, se les denomina vectores opuestos. El vector opuesto al vector $\vec{u}$ es $-\vec{u}$. De la misma manera, el vector opuesto al vector $\vec{ab}$ es $-\vec{ab}$ o también $\vec{ba}$.

$$\begin{aligned} \text{Vector opuesto a } \vec{u}: & -\vec{u} \\ \text{Vector opuesto a } \vec{ab}: & -\vec{ab} = \vec{ba} \end{aligned} \quad (10.5)$$

También establecimos en la sección 7.7 que los vectores opuestos tienen sus componentes opuestas. Podemos, entonces, escribir:

$$\vec{u} = \langle x, y \rangle \Rightarrow \text{Vector opuesto a } \vec{u}: -\vec{u} = \langle -x, -y \rangle$$

$$\vec{u} = \langle 1, 3 \rangle \Rightarrow \text{Vector opuesto a } \vec{u}: -\vec{u} = \langle -1, -3 \rangle$$

En la fig. 10.4 se muestran dos vectores opuestos.

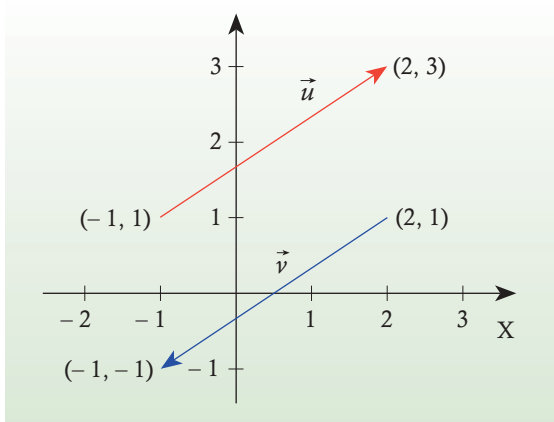


Fig. 10.4 $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores opuestos.

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se pueden expresar como:

$$\vec{u} = \langle 2 - (-1), 3 - 1 \rangle = \langle 3, 2 \rangle$$

$$\vec{v} = \langle -1 - 2, -1 - 1 \rangle = \langle -3, -2 \rangle$$

Si sumamos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, obtenemos el siguiente resultado:

$$\vec{u} + \vec{v} = \langle 3 + (-3), 2 + (-2) \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

Lo que indica que la suma de un vector con su opuesto es igual al vector nulo.

El resultado anterior es general:

La suma de un vector con su opuesto es igual al vector nulo.

10.5 SUSTRACCIÓN DE VECTORES

Para efectuar la sustracción de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se le suma a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$. Entonces:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) \quad (10.6)$$

Consideremos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la fig. 10.5(a) y determinemos la diferencia $\vec{u} - \vec{v}$. Para ello, procedemos de la siguiente manera: por el extremo del vector $\vec{u}$ dibujamos un vector opuesto a $\vec{v}$ ($-\vec{v}$). El vector diferencia $\vec{u} - \vec{v}$ se obtiene uniendo el origen de $\vec{u}$ con el extremo de $-\vec{v}$; es decir, haciendo la suma $\vec{u} + (-\vec{v})$. En la fig. 10.5(b) se expresa el resultado.

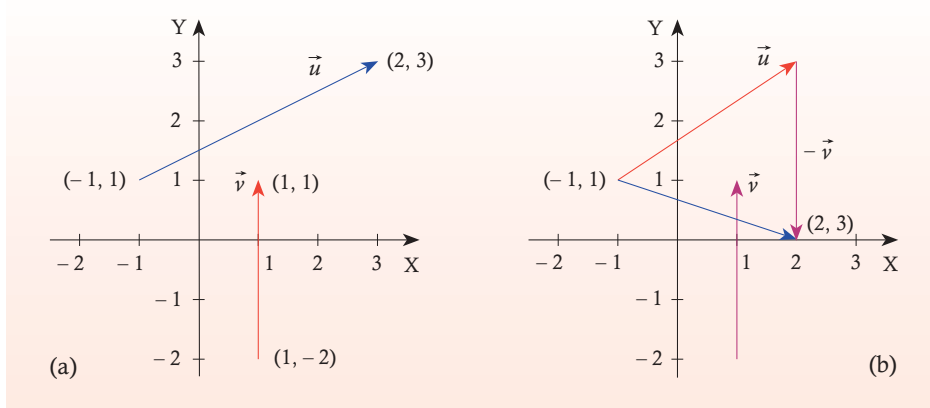


Fig. 10.5 Determinación gráfica de la diferencia $\vec{u} - \vec{v}$.

Analíticamente, la diferencia anterior se determina de la manera siguiente:

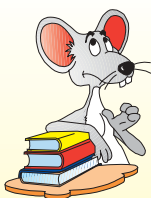
$$\text{vector } \vec{u}: \vec{u} = \langle 3, 2 \rangle$$

$$\text{vector } \vec{v}: \vec{v} = \langle 0, 3 \rangle$$

$$\text{vector } -\vec{v} \quad \langle 0, -3 \rangle$$

$$\text{Suma de } \vec{u} \text{ y } -\vec{v}: \quad \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v} = \langle 3, -1 \rangle$$

Es decir, el vector diferencia tiene componentes $(3, -1)$ como se puede también comprobar del resultado gráfico, fig. 10.5(b).



EJERCICIOS



10.1 Verifica la propiedad conmutativa para los vectores de la fig. 10.6.

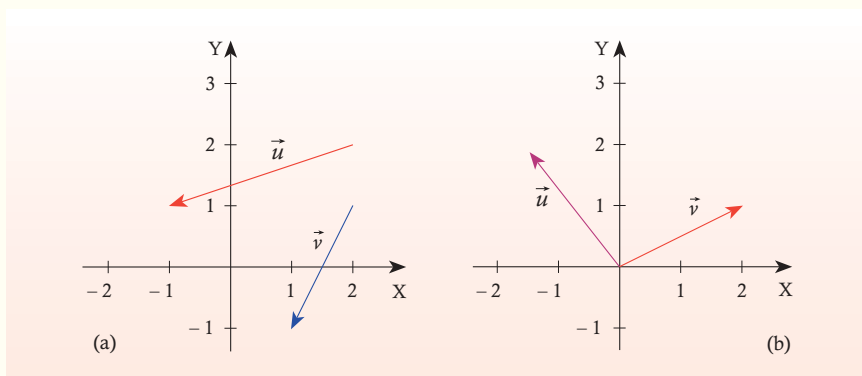


Fig. 10.6 Ejercicio 10.1

10.2 Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ expresados mediante sus componentes, verifica la propiedad conmutativa de su adición.

a) $\vec{u} = \langle -3, -2 \rangle$

$\vec{v} = \langle -1, -2 \rangle$

b) $\vec{u} = \langle -1, 5 \rangle$

$\vec{v} = \langle 2, 1 \rangle$

c) $\vec{u} = \langle -1, 4 \rangle$

$\vec{v} = \langle -2, 2 \rangle$

d) $\vec{u} = \langle 1, 0 \rangle$

$\vec{v} = \langle 3, -2 \rangle$

10.3 Verifica la propiedad asociativa para los vectores de la fig. 10.7.

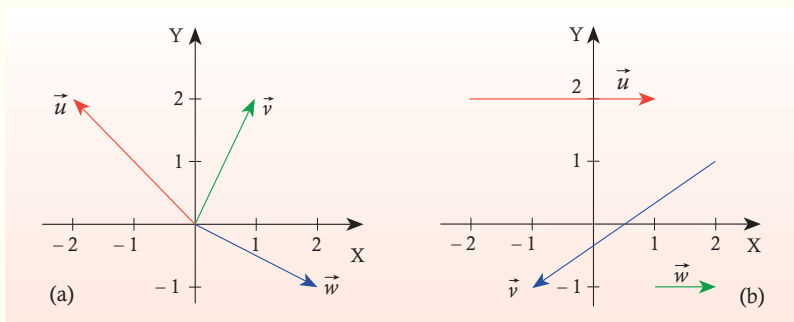


Fig. 10.7 Ejercicio 10.3.

10.4 Utiliza la propiedad asociativa en la adición de los vectores:

$$\text{a) } \vec{u} = \langle -2, 2 \rangle \quad \vec{v} = \langle 1, 2 \rangle \quad \vec{w} = \langle 2, -1 \rangle$$

$$\text{b) } \vec{u} = \langle 3, 0 \rangle \quad \vec{v} = \langle -2, -2 \rangle \quad \vec{w} = \langle 1, 0 \rangle$$

10.5 Determina la suma de los siguientes vectores con sus opuestos:

$$\text{a) } \vec{u} = \langle 3, -2 \rangle \quad \text{b) } \vec{v} = \langle 2, -1 \rangle \quad \text{c) } \vec{w} = \langle 0, 4 \rangle$$

10.6 Determina gráficamente la diferencia de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ mostrados en la fig. 10.8.

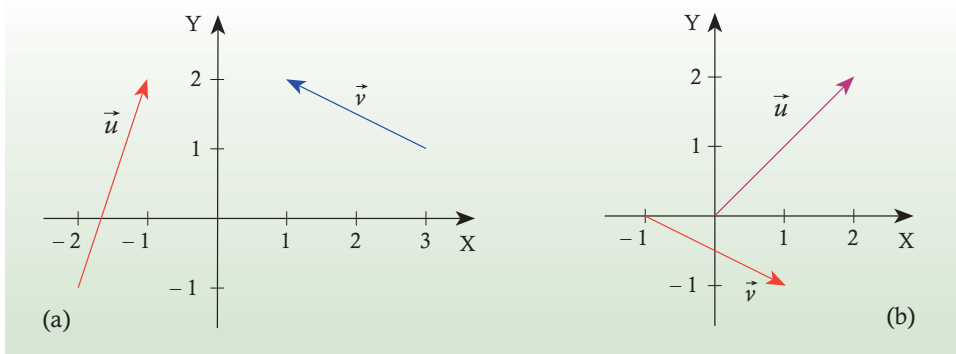


Fig. 10.8 Ejercicio 10.6.

10.6 PRODUCTO DE UN NÚMERO RACIONAL POR UN VECTOR

El producto de un número racional, q , por un vector $\vec{u}$ es otro vector $q\vec{u}$ que cumple con las siguientes condiciones:

1. Tiene la misma dirección del vector $\vec{u}$
2. Su módulo está dado por $|q\vec{u}| = |q||\vec{u}|$
3. Su sentido es el mismo de $\vec{u}$, si $q > 0$.
4. Su sentido es contrario al de $\vec{u}$ si $q < 0$.

Si un vector $\vec{u}$ está dado por sus componentes, el producto $q\vec{u}$ se obtiene multiplicando q por cada componente de $\vec{u}$. Es decir:

$$\vec{u} = \langle x, y \rangle \Rightarrow q\vec{u} = \langle qx, qy \rangle \text{ donde } q \in \mathbb{Q} \quad (10.7)$$

A fin de ilustrar gráficamente cómo se realiza el producto de un número racional q por un vector $\vec{u}$ consideremos la fig. 10.9.

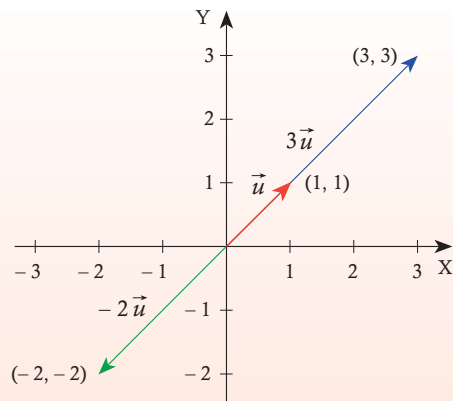


Fig. 10.9 Representación gráfica de los vectores $\vec{u}$, $3\vec{u}$ y $-2\vec{u}$.

El vector $\vec{u}$ tiene su origen en $P(0, 0)$ y su extremo en el punto $P(1, 1)$. Para $\vec{u}$, podemos escribir:

$$\vec{u} = \langle 1, 1 \rangle$$

El vector $3\vec{u}$ tiene su origen en $P(0, 0)$ y su extremo en el punto $P(3, 3)$. Para $3\vec{u}$, podemos escribir:

$$3\vec{u} = \langle 3, 3 \rangle$$

Finalmente, el vector $-2\vec{u}$ tiene su origen en $P(0, 0)$ y su extremo en $P(-2, -2)$. Para $-2\vec{u}$ tendremos:

$$-2\vec{u} = \langle -2, -2 \rangle$$

De acuerdo a lo discutido anteriormente, podemos decir para el vector $3\vec{u}$:

1. Tiene la misma dirección del vector $\vec{u}$.
2. Su módulo o longitud es 3 veces la longitud de $\vec{u}$.
3. Su sentido es el mismo de $\vec{u}$, puesto que $3 > 0$.

Para el vector $-2\vec{u}$ tenemos:

1. Tiene la misma dirección del vector $\vec{u}$.
2. Su módulo es 2 veces el de $\vec{u}$.
3. Tiene sentido contrario al de $\vec{u}$ porque $-2 < 0$.

Observa que los componentes de $3\vec{u}$ se obtienen multiplicando por 3 las componentes de $\vec{u}$ y que las componentes de $-2\vec{u}$ se obtienen multiplicando por -2 las componentes de $\vec{u}$.



¿Cuál es la diferencia entre un vector y un escalar?



10.7 Dado el vector $\vec{u}$ mostrado en la fig. 10.10, determina los siguientes vectores:

- a) $2\vec{u}$ b) $-\vec{u}$ c) $-2\vec{u}$
d) $\frac{1}{2}\vec{u}$ e) $-\frac{1}{2}\vec{u}$ f) $-\frac{2}{3}\vec{u}$

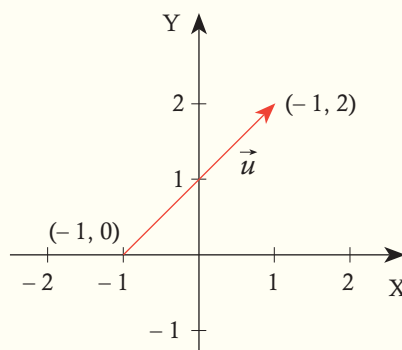


Fig. 10.10 Ejercicio 10.7.

10.8 Dado el vector $\vec{u} = \langle 2, 2 \rangle$, determina analíticamente los vectores:

- a) $2\vec{u}$ b) $-2\vec{u}$ c) $\frac{1}{2}\vec{u}$ d) $-\frac{1}{2}\vec{u}$

10.9 Dados los vectores $\vec{u} = \langle 2, 2 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 1, -2 \rangle$, determina:

- a) $2\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - 2\vec{v}$ c) $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$

Dibuja los vectores resultantes en cada caso.

10.7 PRODUCTO DE UN NÚMERO RACIONAL POR UNA SUMA DE VECTORES

Consideremos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Al multiplicar su suma, $\vec{u} + \vec{v}$ por cualquier número racional q , se

obtiene:

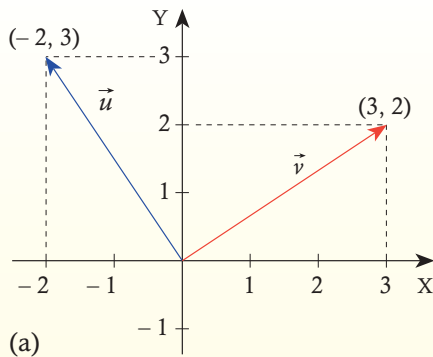
$$q(\vec{u} + \vec{v}) = q\vec{u} + q\vec{v} \quad q \in \mathbf{Q} \quad (10.8)$$

Ejemplo 10.1

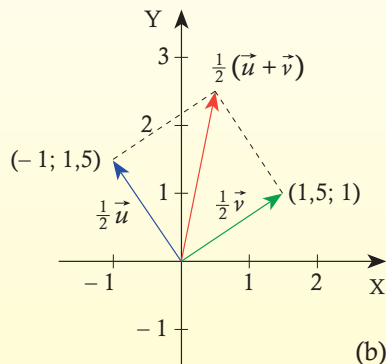
Dados los vectores $\vec{u} = \langle -2, 3 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 3, 2 \rangle$, con el mismo origen: a) Representálos gráficamente. b) Determina la expresión $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$ y representála gráficamente.

Solución

a) En la fig. 10.11(a) se representan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



(a)



(b)

Fig. 10.11 Ejemplo 10.1.

b) $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $\frac{1}{2}\vec{v}$ se pueden expresar como:

$$\frac{1}{2}\vec{u} = \langle -1, 1.5 \rangle \quad \frac{1}{2}\vec{v} = \langle 1.5, 1 \rangle$$

La mitad de la suma de $(\vec{u} + \vec{v})$ es:

$$\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \langle 0.5, 2.5 \rangle$$

Las representaciones vectoriales se muestran en la fig. 10.11(b).

10.8 PRODUCTO DE UNA SUMA DE NÚMEROS RACIONALES POR UN VECTOR

Dados dos números racionales, m y n , y un vector $\vec{u}$ se cumple:

$$(m + n)\vec{u} = m\vec{u} + n\vec{u} \quad m, n \in \mathbf{Q} \quad (10.9)$$

Así, por ejemplo, si $m = 4$, $n = -7$, y $\vec{u} = \langle 2, 3 \rangle$, se tendrá:

$$\vec{R} = (4 - 7)\vec{u} = 4\vec{u} - 7\vec{u} = -3\vec{u} = -3\langle 2, 3 \rangle = \langle -6, -9 \rangle$$

lo que indica que las componentes de $\vec{u}$ son multiplicadas por la suma $4 - 7 = -3$.

10.9 PRODUCTO DE UN NÚMERO RACIONAL p POR UN VECTOR $q\vec{u}$

Dado el número racional p y el vector $q\vec{u}$ su producto se expresa como:

$$p(q\vec{u}) = pq\vec{u} \quad (10.10)$$

Así, por ejemplo:

$$\frac{3}{4}(2\vec{u}) = \frac{6}{4}\vec{u} \quad \frac{1}{2}(-2\vec{u}) = -\vec{u}$$

$$-\frac{2}{5}(5\vec{u}) = -2\vec{u} \quad -\frac{3}{7}\left(-\frac{2}{3}\vec{u}\right) = \frac{2}{7}\vec{u}$$

10.10 MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR LA UNIDAD

Al multiplicar un vector por la unidad, se obtiene el mismo vector:

$$1 \cdot (-\vec{u}) = -\vec{u} \quad 1 \cdot (5\vec{u}) = 5\vec{u} \quad 1 \cdot (-2\vec{u}) = -2\vec{u}$$



10.10 Dado el vector $\vec{u} = \langle 5, 2 \rangle$ determina y representa gráficamente los vectores:

a) $-\vec{u}$

b) $\frac{1}{2}\vec{u}$

c) $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\vec{u}$

d) $-(-2 + 1)\vec{u}$

10.11 Dados los vectores $\vec{u} = \langle 0, 2 \rangle$, $\vec{v} = \langle -1, 1 \rangle$ y $\vec{w} = \langle -2, 4 \rangle$ hallar, gráfica y analíticamente:

a) $\vec{R} = \vec{u} + 2\vec{v}$

b) $\vec{R} = -\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

c) $\vec{R} = \vec{u} - \vec{w}$

d) $\vec{R} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

e) $\vec{R} = -2(\vec{u} + 2\vec{v})$

f) $\vec{R} = \frac{1}{2}\vec{u} + 2\left(\frac{1}{4}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}\right)$

10.12 Dado el vector $\vec{u} = \langle 1, 0 \rangle$ y $m = 2, n = -3$, determina:

a) $(m + n)\vec{u}$

b) $m(n\vec{u})$

c) $3m(-2\vec{u})$

d) $1 \cdot (-5\vec{u})$

e) $3n(\vec{u} + 2\vec{u})$

f) $-2m(\vec{u})$

11

TRASLACIÓN DE FIGURAS PLANAS

11.1 TRASLACIÓN DE FIGURAS EN UN PLANO. VECTOR DE TRASLACIÓN.

La palabra trasladar en la vida diaria significa mover un objeto o una persona de un sitio a otro. En Matemática, el término trasladar se utiliza con más precisión. En particular, es de importancia establecer qué dirección y sentido se siguió al efectuar el traslado.

Imagina que el rectángulo grande de la fig. 11.1 es el pizarrón de tu salón de clases y que el rectángulo pequeño es el borrador.

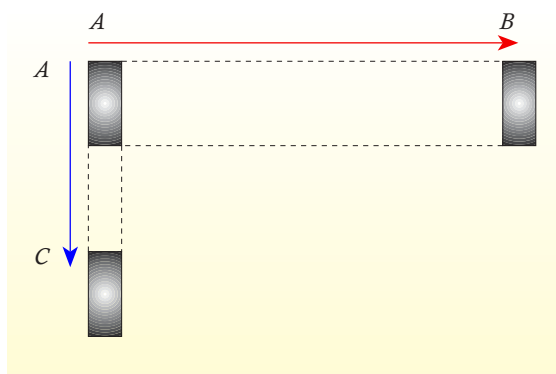


Fig. 11.1 El borrador se traslada desde la posición A hasta la B o la C .

El borrador puede ser trasladado por tu profesor desde la posición A hasta la B o la C . Al trasladar el borrador desde la posición A a la B , se ha seguido una dirección horizontal y sentido hacia la derecha, tal como lo indica el vector $\vec{AB}$. Así mismo, la distancia recorrida por el borrador corresponde al módulo del vector $\vec{AB}$. Podemos, entonces, concluir que la traslación de una figura puede asociarse a un vector que especifica tanto la dirección y sentido de la traslación, como la magnitud de la misma. De la misma forma, el borrador en la fig. 11.1 puede ser trasladado desde

la posición A hasta la posición C , según el vector $\vec{AC}$ que indica que en la traslación se ha seguido una dirección vertical y sentido hacia abajo. En general, podemos decir:

Cualquier figura se puede trasladar siguiendo la dirección y sentido de un vector. La magnitud del vector indicará cuánto se ha trasladado la figura.

Al vector asociado con la traslación de una figura, se le denomina **vector de traslación**. Los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ en la fig. 11.1 son vectores de traslación.

11.2 TRASLACIÓN DE UN PUNTO. FUNCIÓN DE TRASLACIÓN.

Toda traslación envuelve dos componentes fundamentales: la figura a trasladar y el vector de traslación. Consideremos la traslación de un punto p en un plano, tal como se indica en la fig. 11.2.

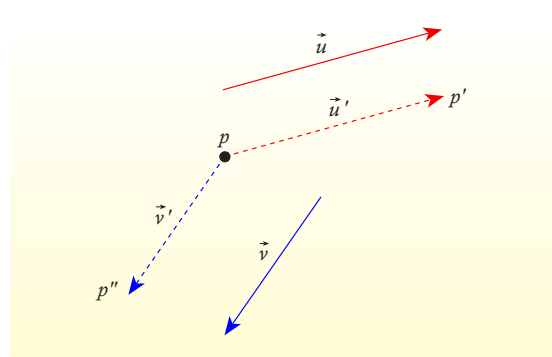


Fig. 11.2 Traslación del punto p , según los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

A fin de trasladar el punto p , según el vector $\vec{u}$, se dibuja un vector equipolente $\vec{u}'$ con origen en p . El extremo del vector $\vec{u}'$ corresponde al punto p' , que es la traslación de p según el vector $\vec{u}$. Similarmente, para trasladar el punto p , según el vector $\vec{v}$, se dibuja un vector equipolente $\vec{v}'$ con origen en p .

Su extremo p'' corresponde a la traslación del punto p , según el vector $\vec{v}$.

Como podrás imaginarte, cualquier punto p del plano puede trasladarse mediante un vector $\vec{u}$ de traslación. Al punto p' correspondiente al extremo del vector equipolente $\vec{u}'$, se le denomina imagen de p , según el vector $\vec{u}$. Así, en la fig. 11.2, p'' es la imagen de p , según el vector $\vec{v}$. Lo establecido anteriormente se puede expresar, también, como sigue:

Una traslación T es una función que hace corresponder a cada punto de un plano p otro punto de ese mismo plano llamado imagen, según un vector cualquiera $\vec{u}$.

Si usamos la notación empleada cuando estudias-te funciones, podemos escribir:

$$T: \pi \Rightarrow \pi \quad (11.1)$$

$$T_{\vec{u}}(p) = p' \quad (11.2)$$

La relación (11.1) nos indica que la función de traslación T tiene como conjuntos de partida y de llegada al mismo plano π , mientras que (11.2) establece que p' es la imagen de p , según el vector $\vec{u}$.

En la fig. 11.3 se muestra la representación sagital de una función de traslación.

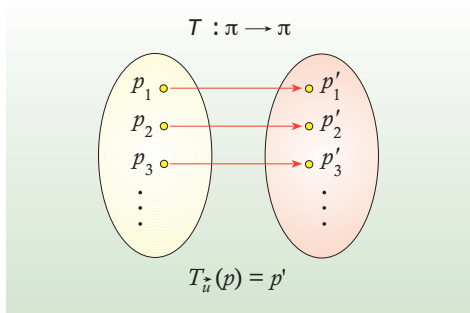


Fig. 11.3 Representación sagital de una función de traslación.

De esta figura, podemos deducir que:

- Cada elemento del conjunto de llegada $\{p'_1, p'_2, p'_3, \dots\}$ es imagen de algún elemento del conjunto de partida.
- Cada elemento del conjunto de llegada es imagen de un solo elemento del conjunto de partida.

Las dos características anteriores corresponden, según lo estudiado por tí en el objetivo 1, a una función biyectiva y, por lo tanto, podemos decir:

Una traslación es una función biyectiva.

11.3 TRASLACIÓN DE FIGURAS PLANAS. ISOMETRÍA.

Una figura plana se puede considerar formada por un número infinito de puntos. Por lo tanto, trasladar una figura plana, según un vector $\vec{u}$, es trasladar todos los puntos de dicha figura según $\vec{u}$. En la práctica, basta con trasladar dos o más puntos, dependiendo de la figura, para obtener la traslación de la misma.

11.3.1 Traslación de un segmento

Consideremos el segmento pq de la fig. 11.4 y efectuemos una traslación del mismo, según los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

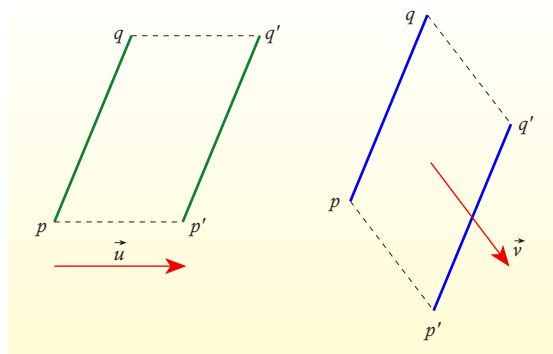


Fig. 11.4 Traslación del segmento pq , según los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Para ello basta con trasladar los puntos p y q del segmento según $\vec{u}$ y $\vec{v}$. De esta manera, se

obtienen p' y q' que son las imágenes de los puntos p y q según los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Como puedes observar, en ambos casos la longitud del segmento pq es igual a la del segmento $p'q'$. Uniendo p' con q' se obtiene la imagen del segmento pq según los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Podemos entonces concluir que:

Las traslaciones conservan las distancias.

A las transformaciones, en este caso una traslación, que conservan las distancias, se les denomina *isometrías*. Luego:

Toda traslación es una isometría.

Para los dos segmentos pq de la fig. 11.4, podemos escribir:

$$T_{\vec{u}}(pq) = p'q' \quad T_{\vec{v}}(pq) = p'q' \quad (11.3)$$

11.3.2 Traslación de un triángulo

Un triángulo es una figura plana formada por tres segmentos. Su traslación, según el vector $\vec{u}$, se obtiene trasladando los tres segmentos que lo conforman. Así, en la fig. 11.5, el triángulo Δmnp se traslada, según el vector $\vec{u}$, trasladando los segmentos mn , np y pm , según dicho vector. El triángulo obtenido, $\Delta m'n'p'$, es la imagen del triángulo Δmnp , según $\vec{u}$. Al igual que en el caso anterior, la traslación del triángulo Δmnp es una isometría y por tanto se conservan todas las distancias. Esta traslación se puede escribir como:

$$T_{\vec{u}}(\Delta mnp) = \Delta m'n'p' \quad (11.4)$$

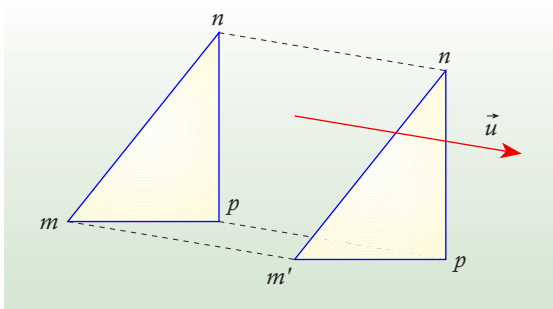


Fig. 11.5 Traslación del triángulo Δmnp , según el vector $\vec{u}$.

11.3.3 Traslación de cualquier figura plana

La traslación de cualquier figura plana, según un vector $\vec{u}$, tiene las mismas características mencionadas anteriormente para un segmento o un triángulo. En la fig. 11.6 se muestran varios ejemplos de tales traslaciones.

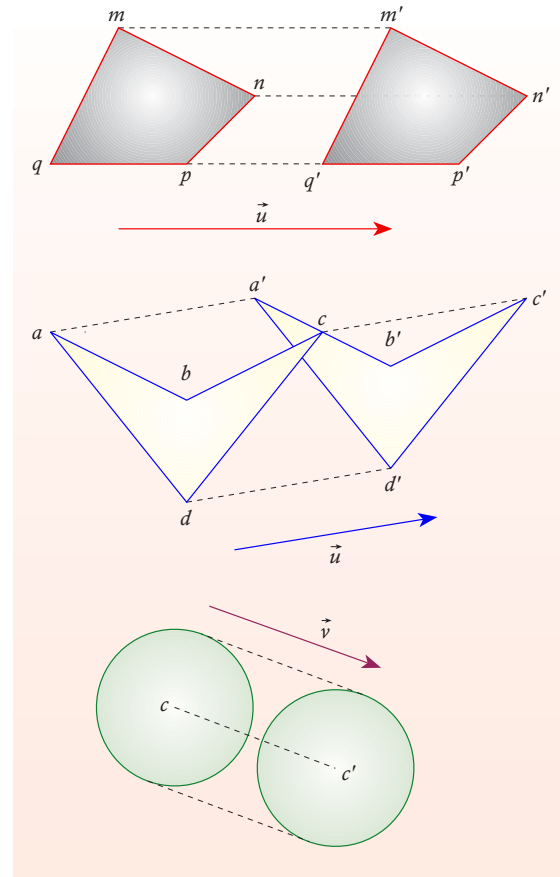


Fig. 11.6 Traslación de figuras planas según un vector dado.



¿Podrías imaginarte cómo trasladar una figura en el espacio, mediante un sistema tridimensional?



11.1 Traslada el punto $P(0, 1)$ según un vector cuyo origen está en $P_1(1, 0)$ y cuyo extremo está en $P_2(3, 2)$.

11.2 Determina la imagen del punto de la fig. 11.7, según los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ mostrados.

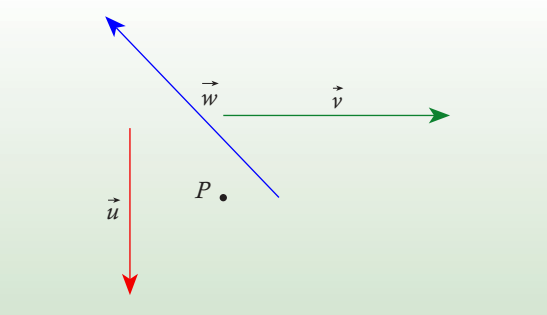


Fig. 11.7 Determina la imagen de P , según los vectores mostrados. Ejercicio 11.2.

11.3 Traslada los segmentos de la fig. 11.8, según los vectores dados.

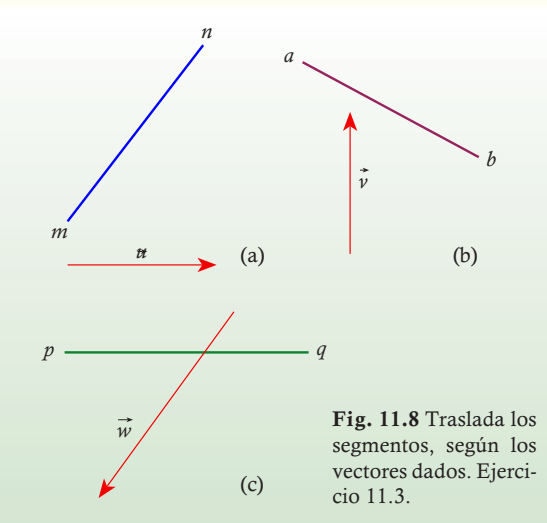


Fig. 11.8 Traslada los segmentos, según los vectores dados. Ejercicio 11.3.

11.4 Traslada los triángulos de la fig. 11.9, según los vectores dados.

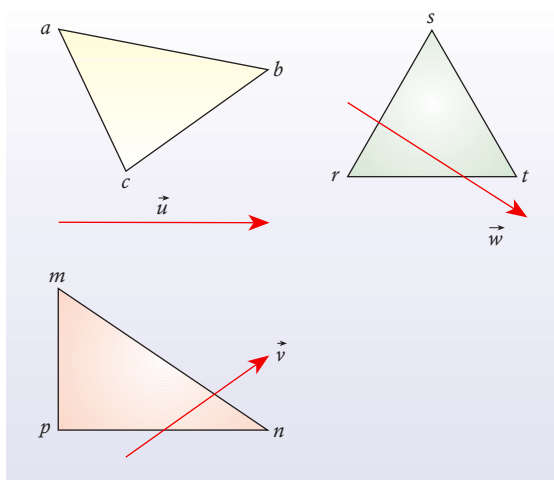


Fig. 11.9 Traslada los triángulos, según $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Ejercicio 11.4.

11.5 En la fig. 11.10 se muestran varias figuras planas. Determina las imágenes de dichas figuras, según los vectores dados.

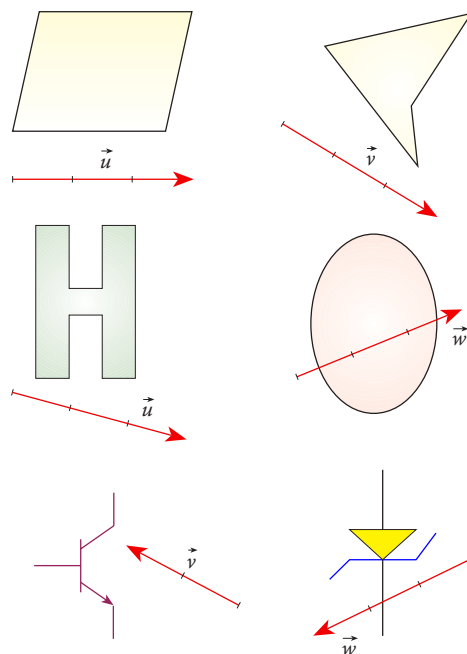


Fig. 11.10 Determina las imágenes de las figuras, según los vectores dados. Ejercicio 11.5.

11.6 En la fig. 11.11 se muestran dos figuras planas y sus respectivas imágenes. Determina la magnitud, dirección y sentido del vector que originó las imágenes.

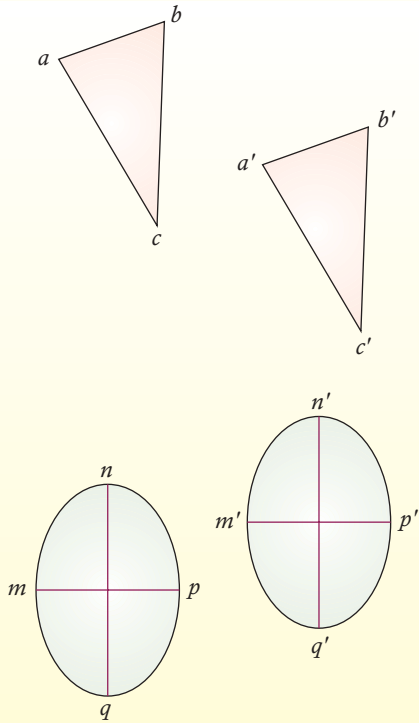


Fig. 11.11 Dadas las figuras planas y sus imágenes, determina el vector que las originó. Ejercicio 11.6.

12

ROTACIÓN DE FIGURAS PLANAS

12.1 ÁNGULOS ORIENTADOS

Considera una barra que puede girar alrededor de un punto o , tal como se muestra en la fig. 12.1.

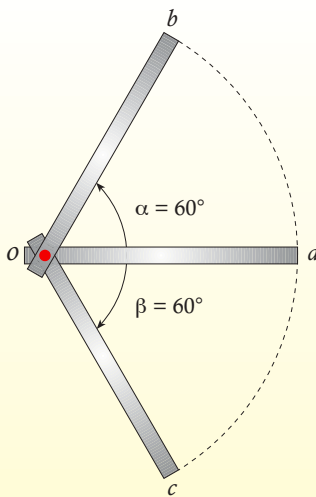


Fig. 12.1 α es un ángulo positivo. β es un ángulo negativo.

Inicialmente, la barra se encuentra en la posición oa . Si la movemos hacia arriba (sentido antihorario), se describe el ángulo $\alpha = aob$, mientras que si la movemos hacia abajo (a favor del reloj), se describe el ángulo $\beta = aoc$. Los dos movimientos son opuestos y se habla entonces de *ángulos positivos* y *ángulos negativos*.

Un ángulo se dice que es positivo si, al describirlo, se realiza un movimiento contrario al de las agujas del reloj (sentido antihorario).

Un ángulo se dice que es negativo si al describirlo se realiza un movimiento que sigue al de las agujas del reloj (sentido horario).

De acuerdo con lo anterior, α es un ángulo positivo, mientras que β es un ángulo negativo. Si medimos los ángulos α y β con un transportador, podemos escribir:

$$\alpha = 60^\circ \quad \beta = -60^\circ$$

12.2 ROTACIONES

12.2.1 Rotación de un punto

Considera, nuevamente, una barra que puede rotar alrededor de un centro de rotación o , como se indica en la fig. 12.2.

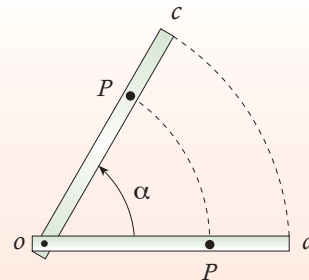


Fig. 12.2 Rotación del punto P con centro de rotación en o , según el ángulo α .

Si se fija la atención en un punto P cualquiera, que pertenezca a la barra, se observa que al girar la misma un ángulo positivo α , el punto P también gira. Decimos entonces que se ha producido una rotación del punto P con centro de rotación o y según el ángulo α . De lo anterior, podemos deducir que:

Para efectuar la rotación de un punto, es necesario conocer tanto el centro como el ángulo de rotación.

EJEMPLO 12.1

Efectúa una rotación de $+60^\circ$ del punto P con centro de rotación en o , fig. 12.3(a).

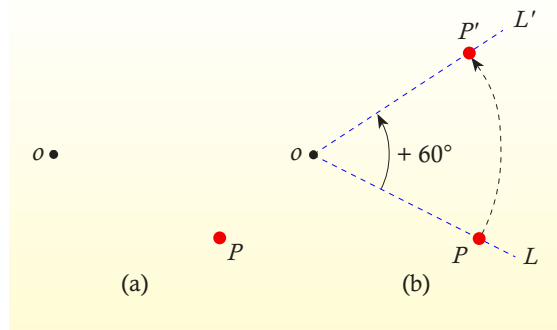


Fig. 12.3 Rotación del punto P un ángulo de 60° alrededor del centro o . Ejemplo 12.1.

Solución

A fin de efectuar la rotación de P un ángulo de 60° alrededor del punto o , procederemos de acuerdo a los siguientes pasos:

1. Dibujamos la recta L que pasa por los puntos o y p .
2. Colocamos un transportador con su centro en o y cuya línea de referencia descansa sobre la recta L . De esta manera leemos el ángulo de $+60^\circ$ en sentido antihorario (por tratarse de un ángulo positivo). La recta L' marca la medida de este ángulo.
3. Usando un compás con centro en o y medida oP , trazamos un arco hasta cortar la recta L' . El punto de corte, P' , corresponde a la rotación del punto P . El resultado se indica en la fig. 12.3(b).

EJEMPLO 12.2

Determina la imagen del punto $P(2, 2)$ de la fig. 12.4(a) mediante una rotación de -90° alrededor del punto $P(0, 0)$.

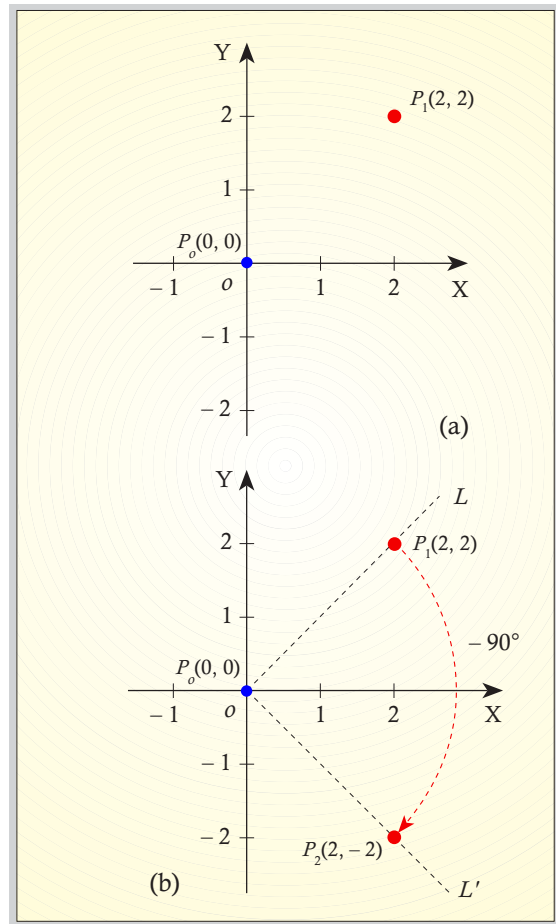


Fig. 12.4 Rotación del punto $P_1(2, 2)$ un ángulo de -90° alrededor del punto $P_o(0, 0)$.

En la fig. 12.4(b) se muestra el procedimiento:

1. Se dibuja la recta L entre los puntos $P_1(0, 0)$ y $P_2(2, 2)$.
2. Con un transportador con centro en o y referencia la línea L , se mide el ángulo de 90° (sentido horario por tratarse de un ángulo negativo). Se determina así la recta L' .
3. Se utiliza un compás con centro en $P(0, 0)$ y con radio oP . Se traza un arco en sentido horario hasta cortar la recta L' . Este punto de corte es la imagen del punto P mediante la rotación de centro 0 y ángulo -90° .

EJEMPLO 12.3

En la fig. 12.5(a) se indica un punto P que se va a rotar, según el ángulo mostrado, con centro en el punto o . Determina tal rotación.

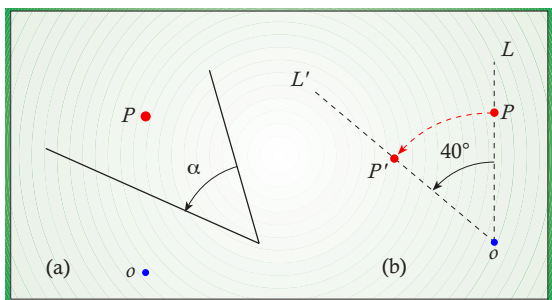


Fig. 12.5 Rotación del punto P alrededor de o , según el ángulo α . Ejemplo 12.3.

Solución

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Se mide el ángulo α con un transportador. El resultado es $\alpha = 40^\circ$.
2. Se dibuja la recta L entre los puntos o y P . (Fig. 12.5(b)).
3. Con centro en o y partiendo de la recta L , se mide el ángulo α en el sentido antihorario usando un transportador. Se obtiene así la recta L' .
4. Con radio oP y centro en o , se usa un compás para trazar el arco PP' , que corta a la recta L' en P' , imagen de P según la rotación de centro o y ángulo α .

12.2.2 Rotación de un segmento

La rotación de un segmento comprende la rotación de cada uno de los puntos que lo constituyen. Al igual que en el caso de un punto, para efectuar la rotación de un segmento, es necesario conocer tanto el centro como el ángulo de rotación. En la práctica, la rotación de un segmento se reduce a la rotación de sus puntos extremos. La unión de esos puntos extremos determina el segmento rotado. Los ejemplos que siguen ilustran el procedimiento

EJEMPLO 12.4

Determina la rotación del segmento ab , mostrado en la fig. 12.6(a), con centro en el punto o , según un ángulo de -50° .

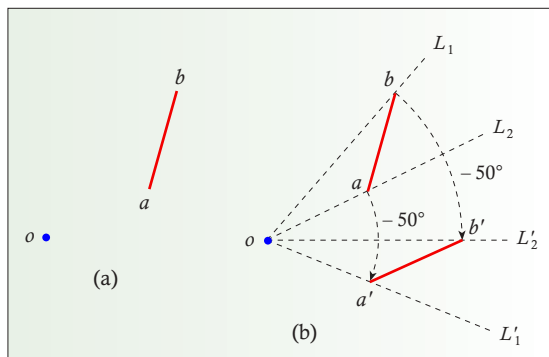


Fig. 12.6 Rotación del segmento ab , según un ángulo de -50° con centro en o .

Solución

Para efectuar la rotación pedida, basta con efectuar la rotación de los puntos a y b , extremos del segmento. El procedimiento a seguir se muestra en la fig. 12.6(b) y comprende los siguientes pasos:

1. Se traza la recta L_1 entre los puntos o y b .
2. Se traza la recta L_2 entre los puntos o y a .
3. Se coloca un transportador con centro en o y con referencia en la línea L_1 . De esta manera se mide el ángulo de -50° correspondiente a la rotación del punto b . La rotación transforma el punto b en su imagen b' .
4. Se coloca el transportador con centro en o y con referencia en la línea L_2 . De esta forma se mide el ángulo de -50° correspondiente a la rotación del punto a . La rotación transforma al punto a en su imagen a' .
5. Se une a' con b' para obtener el segmento $a'b'$, que es la rotación pedida; es decir, la imagen del segmento ab , según el ángulo de rotación -50° y centro o .

EJEMPLO 12.5

Se tiene un segmento cuyos extremos son los puntos $a(3, 2)$ y $b(-1, 2)$. Determina la rotación de dicho segmento con centro de rotación en el punto $P(1, 0)$ y ángulo de rotación de $+80^\circ$.

Solución

En la fig. 12.7(a) se señala el segmento ab y el punto de rotación $P(1, 0)$. El procedimiento a seguir, de acuerdo a lo ya discutido, se indica en la fig. 12.7(b).

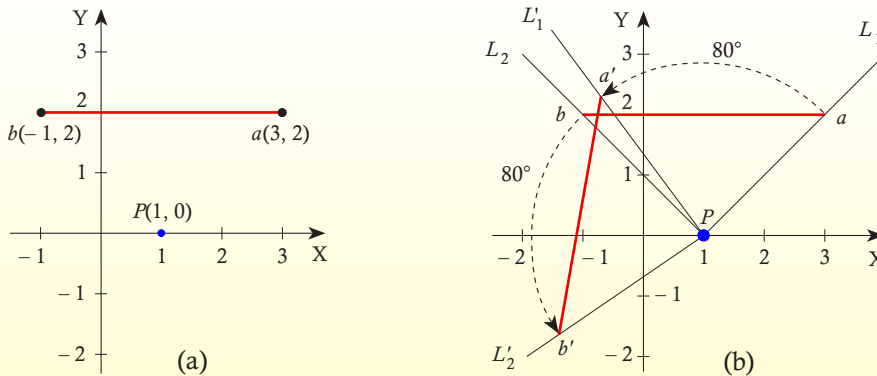


Fig. 12.7 Rotación de un segmento ab según un ángulo de $+80^\circ$ con centro en $P(1, 0)$.

12.2.3 Rotación de un triángulo

La rotación de un triángulo Δabc según un ángulo α y centro de rotación o , se obtiene rotando los tres vértices del triángulo y uniendo las imágenes de dichos vértices.

EJEMPLO 12.6

Determina la imagen del triángulo Δabc mostrado en la fig. 12.8(a) según un ángulo de 100° y centro de rotación o .

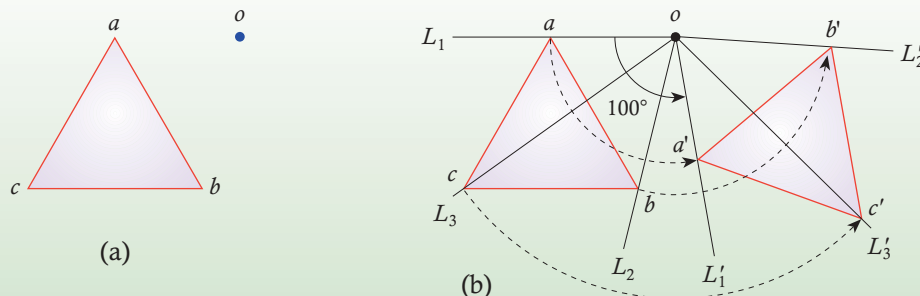


Fig. 12.8 Rotación del triángulo Δabc , según un ángulo de 100° alrededor del punto o .

Solución

1. Se trazan las rectas L_1 entre o y a , L_2 entre o y b y L_3 entre o y c .
2. Usando un transportador con centro en o y tomando la recta L_1 como referencia, se mide un ángulo de 100° en sentido antihorario. De esta manera, se obtiene la recta L_1' sobre la cual localizamos, de la manera descrita anteriormente, el punto a' (rotación de a).
3. Con el transportador con centro en o y usando la recta L_2 como referencia, se mide nuevamente un ángulo de 100° ; se obtiene así la recta L_2' sobre la cual localizamos el punto b' , imagen de b .
4. Con el transportador en o y usando la recta L_3 como referencia, se mide nuevamente un ángulo de 100° . De esta forma, se obtiene la recta L_3' sobre la cual se halla la imagen del punto c (c').
5. Se unen a' , b' y c' para obtener el triángulo $\Delta a'b'c'$, que es la imagen del triángulo Δabc .

12.3 DETERMINACIÓN DEL CENTRO Y ÁNGULO DE ROTACIÓN, DADAS UNA FIGURA Y SU IMAGEN PRODUCIDA POR ROTACIÓN

Dadas una figura cualquiera y su imagen, obtenida por una rotación, es posible determinar el centro de rotación y el ángulo correspondiente. Para esto debemos tomar en cuenta la siguiente afirmación:

Si una rotación transforma al punto A en el punto A' , el centro de rotación se halla en la perpendicular trazada por el punto medio del segmento AA' .

La idea se ilustra en la fig. 12.9. El punto A' es la imagen del punto A . La recta L es la perpendicular trazada en el punto medio del segmento AA' que se obtiene al unir A con A' . La afirmación anterior nos dice que el centro de rotación se encuentra sobre esta recta L . Esto nos permite, como veremos a continuación, determinar el centro y el ángulo

de rotación de figuras planas conocidas la figura original y su imagen.

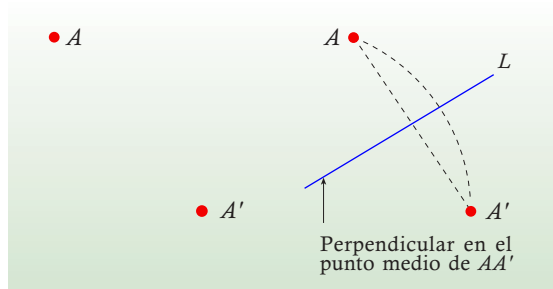


Fig. 12.9 Si A' es la imagen de A mediante una rotación, el centro de rotación se encuentra sobre la perpendicular trazada por el punto medio de AA' .

EJEMPLO 12.7

El segmento $A'B'$ de la fig. 12.10(a) es la imagen del segmento AB mediante una rotación. Determina el centro y ángulo de rotación.

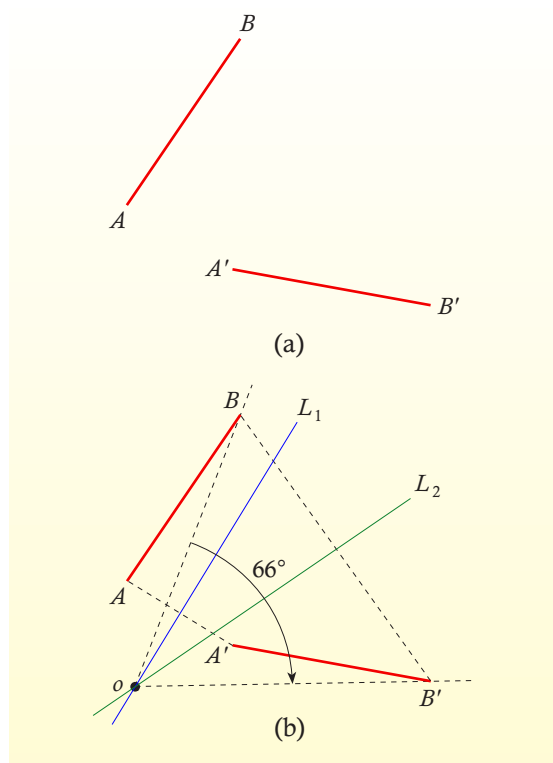


Fig. 12.10 Dados el segmento AB y su imagen $A'B'$, se puede determinar su centro y ángulo de rotación.

Solución

El procedimiento para determinar el centro y ángulo de rotación es el siguiente:

1. Se unen los puntos A, A' , y los puntos B y B' . Se obtienen así los segmentos AA' y BB' .
2. Se dibujan las perpendiculares a los segmentos AA' y BB' por sus puntos medios. De esta forma se obtiene las rectas L_1 y L_2 . El punto o , donde cortan L_1 y L_2 , es el centro de rotación.
3. Se une el punto o con uno de los extremos del segmento AB , por ejemplo, el extremo B . Esto origina la recta oB .
4. Se une el punto o con la imagen B' del punto B . Esto origina la recta oB' .
5. Con un transportador con su origen en o y tomando como referencia la recta oB' , se mide el ángulo comprendido entre oB' y oB . Este es el ángulo de rotación. Para la fig. 12.10, este ángulo es de aproximadamente -66° . Por ser un ángulo negativo, su sentido es horario, ya que la imagen $A'B'$ de AB está dirigida en el sentido de giro de las agujas del reloj. ¿No hay ninguna posibilidad de que el ángulo sea otro y de que el sentido sea antihorario? Razona tu respuesta.

12.4 LA ROTACIÓN ES UNA ISOMETRÍA

En todos los ejemplos de rotaciones estudiados en este objetivo, has podido observar que la imagen de una figura plana que se somete a una rotación conserva las mismas distancias que la figura original. Entonces, podemos afirmar:

Toda rotación conserva las distancias y es, por tanto, una isometría.

Así mismo, se puede decir que:

Toda rotación es una función biyectiva que conserva las distancias.

La función es biyectiva porque cada punto del conjunto de llegada es imagen de algún punto del conjunto de partida y cada punto del conjunto de llegada es imagen de un solo punto del conjunto de partida.

En la fig. 12.11 se representa simbólicamente, mediante un diagrama sagital, la función biyectiva que corresponde a una rotación.

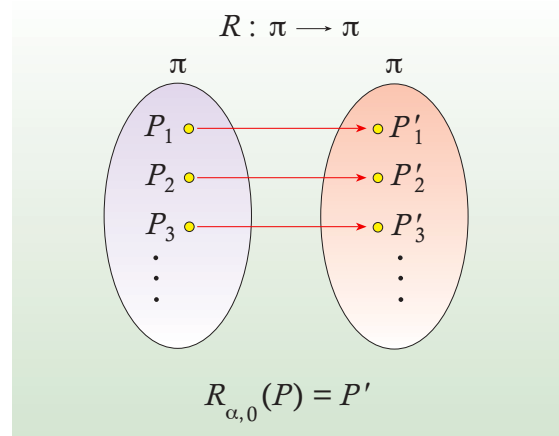


Fig. 12.11 Representación sagital de una función de rotación.

El diagrama nos dice lo siguiente:

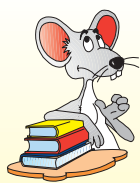
1. La función de rotación R es una transformación en un mismo plano π . Esto significa que tanto el conjunto de partida como el de llegada es el plano π . Es decir, se puede escribir:

$$R : \pi \rightarrow \pi \quad (12.1)$$

2. La notación de la rotación, como función, es la siguiente:

$$R_{\alpha, o}(P) = P' \quad (12.2)$$

que significa: la rotación R de un punto P , según un ángulo de rotación α y con centro en o , origina un punto imagen P' .



EJERCICIOS



12.1 Determina la rotación de los puntos de la fig. 12.12, según los ángulos y centros de rotación indicados.

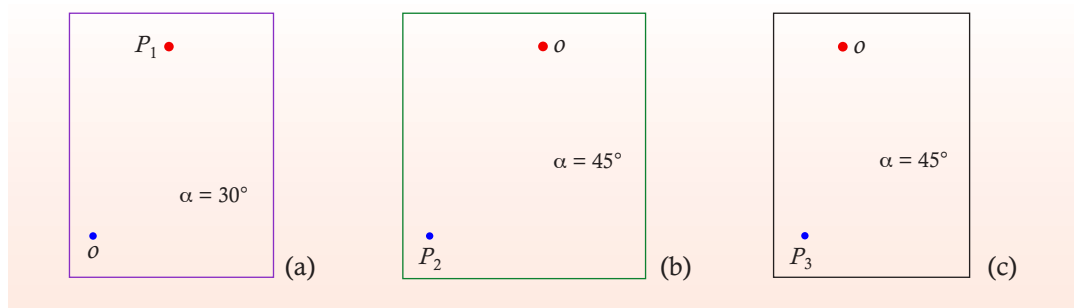


Fig. 12.12 Determina la rotación de P_1 , P_2 y P_3 , según los ángulos y centros de rotación indicados. Ejercicio 12.1.

12.2 Determina la rotación de los segmentos de la fig. 12.13, según los ángulos y centros de rotación indicados.

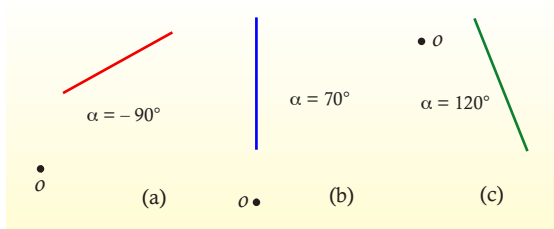


Fig. 12.13 Determina la rotación de los segmentos mostrados, según los ángulos y centros de rotación indicados. Ejercicio 12.2.

12.3 Se tiene un segmento cuyos extremos son los puntos $m(3, 3)$ y $n(0, 2)$. Determina la rotación de dicho segmento según un ángulo de -150° y centro de rotación $P(2, 1)$.

12.4 Se tiene un segmento cuyos extremos son los puntos $m(3, 3)$ y $n(0, 2)$. Determina la rotación de dicho segmento según un ángulo de 120° y centro de rotación $P(0, 0)$.

12.5 Determina la rotación de los triángulos mostrados en la fig. 12.14 según los centros de rotación y ángulos indicados.

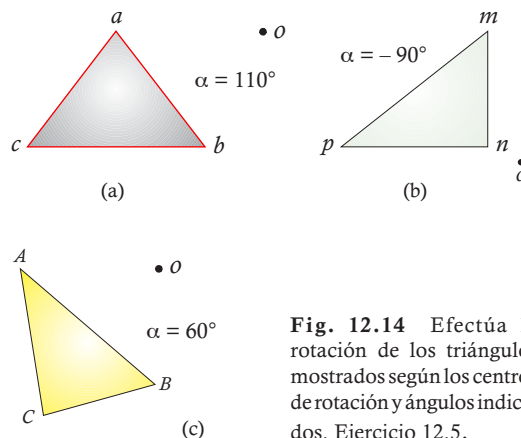


Fig. 12.14 Efectúa la rotación de los triángulos mostrados según los centros de rotación y ángulos indicados. Ejercicio 12.5.

12.6 Se tiene un triángulo de vértices $a(0, 0)$, $b(2, 1)$ y $c(1, 3)$. Determina la imagen de ese triángulo si el ángulo de rotación es de 80° y el centro de rotación está en: **a)** $P(1, -1)$, **b)** $P(0, 0)$

12.7 Dados el segmento ab y el triángulo Δmnp de la fig. 12.15, efectúa una traslación de los mismos, según el vector $\vec{u}$ y luego una rotación con centro en o y según el ángulo indicado.

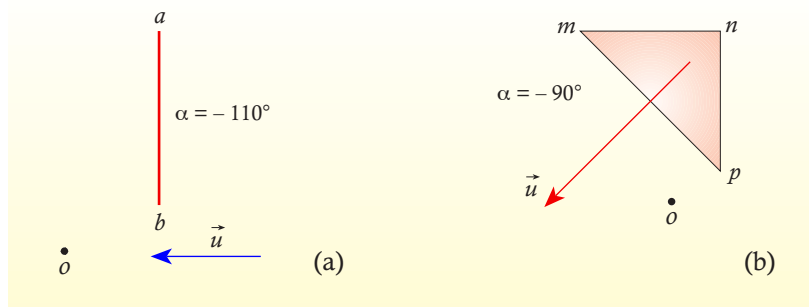
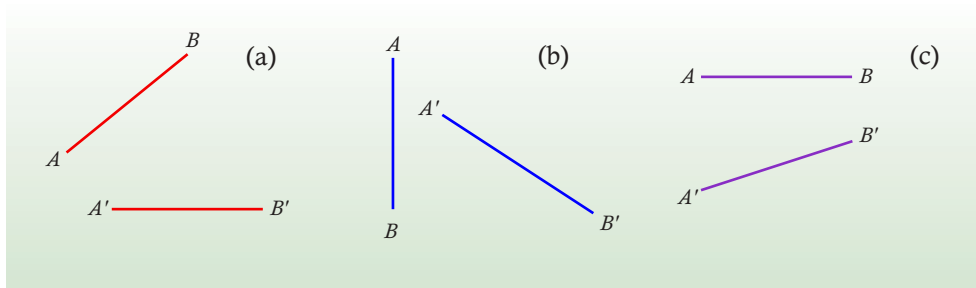


Fig. 12.15 Efectúa la traslación y rotación del segmento y el triángulo mostrados. Ejercicio 12.7.

12.8 El segmento $A'B'$ de la fig. 12.16, es la imagen del segmento AB mediante una rotación. Determina el centro y el ángulo de rotación.



Fig; 12.16 Si $A'B'$ es la imagen del segmento AB , determina el centro y ángulo de rotación. Ejercicio 12.8.

13

SIMETRÍA AXIAL

13.1 SIMETRÍA AXIAL. EJE DE SIMETRÍA.

Considera la fig. 13.1 donde se muestran dos insectos. En todos los casos se observa que las figuras son simétricas en relación con la recta L . Es decir, lo que queda a la izquierda de la recta L es exactamente igual a lo que queda a la derecha, y la simetría se dice que es axial. La palabra axial significa relativo al eje.

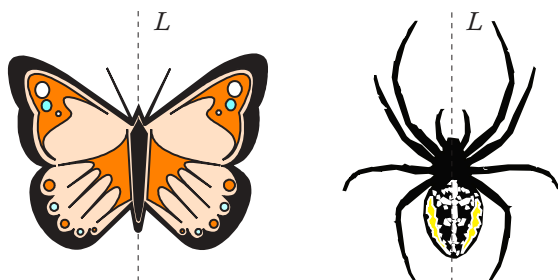


Fig. 13.1 Los insectos son simétricos alrededor de la recta L .

Tanto en la naturaleza como en las cosas creadas por el hombre, abunda la simetría axial. Muestran simetría axial muchos insectos y otros seres vivos. Un bote de pesca usado por pescadores artesanales, una silla, un bombillo, etc., son ejemplos de objetos que poseen simetría axial.

Una figura puede tener uno o más ejes de simetría.

Los insectos de la fig. 13.1 poseen un solo eje de simetría. Sin embargo, las figuras geométricas de la fig. 13.2 presentan más de un eje de simetría.

13.2 IMÁGENES DE FIGURAS MEDIANTE SIMETRÍA AXIAL

A continuación estudiaremos las imágenes que se obtienen de un punto, un segmento y un triángulo, mediante simetría axial. El procedimiento puede ser extendido fácilmente a figuras más complejas imaginando que dichas figuras están formadas por un número infinito de puntos.

13.2.1 Imagen de un punto mediante una simetría

El procedimiento para determinar la imagen de un punto respecto al eje de simetría L , se muestra en la fig. 13.3 y comprende los siguientes pasos:

1. Desde el punto a o b se trazan perpendiculares a la recta L . Estas rectas cortan a L en el punto m .
2. Sobre las rectas perpendiculares, se miden las distancias $am = a'm$ y $bm = b'm$. Los extremos de estos segmentos corresponden a las imágenes a' y b' de los puntos a y b , obtenidas mediante simetrías

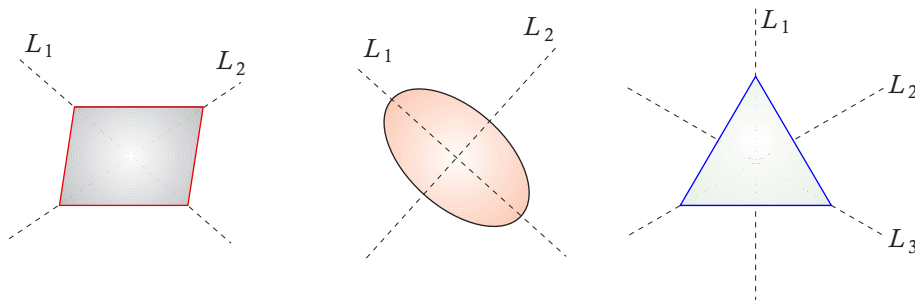


Fig. 13.2 Figuras geométricas con más de un eje de simetría.

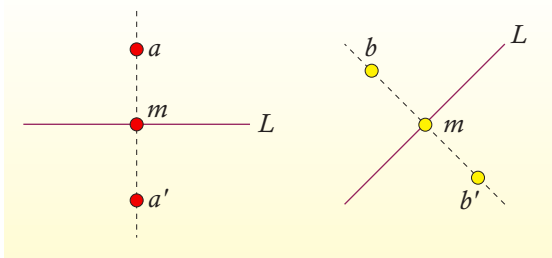


Fig. 13.3 Imágenes de los puntos a y b respecto al eje de simetría L .

alrededor del eje L . También se puede decir que los puntos a' y b' son los puntos simétricos de a y b en relación con el eje de simetría L .

13.2.2 Imagen de un segmento mediante una simetría

Para determinar la imagen de un segmento ab mediante una simetría alrededor del eje L , basta con obtener los puntos simétricos de sus extremos con respecto al mismo eje de simetría y luego unirlos. En la fig. 13.4 se ilustra la manera de hacerlo.

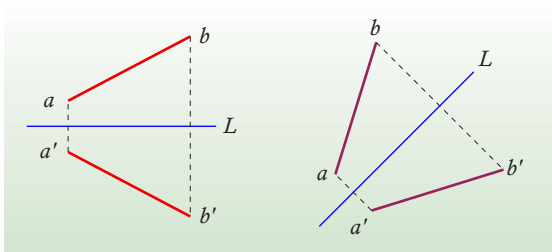


Fig. 13.4 Imágenes del segmento ab respecto al eje de simetría L .

Observa que en ambos casos se cumple que $ab = a'b'$. Es decir, las distancias se conservan.

13.2.3 Imagen de un triángulo mediante una simetría

Para determinar la imagen del triángulo Δabc de la fig. 13.5, según una simetría axial con respecto al eje de simetría L , basta con obtener las imágenes de sus vértices y luego unir dichas imágenes. Nuevamente se observa que en la transformación, las distancias se conservan. En particular:

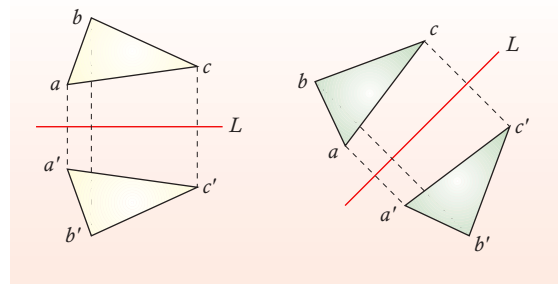


Fig. 13.5 Imagen de un triángulo Δabc respecto al eje de simetría L .

$$ab = a'b' \quad bc = b'c' \quad ac = a'c' \quad (13.1)$$

El triángulo $\Delta a'b'c'$ se dice que es el simétrico del triángulo Δabc .

13.3 LA SIMETRÍA AXIAL COMO UNA ISOMETRÍA

Como ya hemos visto, la imagen obtenida de una figura plana mediante una simetría axial, conserva las mismas distancias que la figura original. Luego, podemos afirmar:

Toda simetría axial conserva las distancias y es, por tanto, una isometría.

Igualmente puede afirmarse que:

Toda simetría axial es una función biyectiva que conserva las distancias.

En la fig. 13.6 se muestra la representación sagital de una simetría axial.

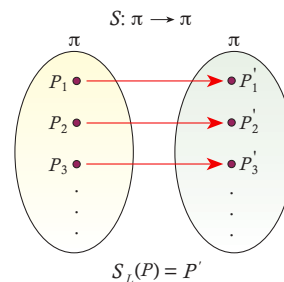


Fig. 13.6 La simetría axial como función biyectiva.

Tanto el conjunto de partida como el de llegada, es el plano π . Es decir, la simetría es una transformación en el mismo plano π . De allí que podemos

escribir:

$$S: \pi \rightarrow \pi \quad (13.2)$$

A cada punto P del conjunto de partida le corresponde un solo punto en el conjunto de llegada. La notación funcional de una simetría es:

$$S_L(P) = P' \quad (13.3)$$

relación que establece que la simetría de un punto P según un eje de simetría L , da origen al punto P' .

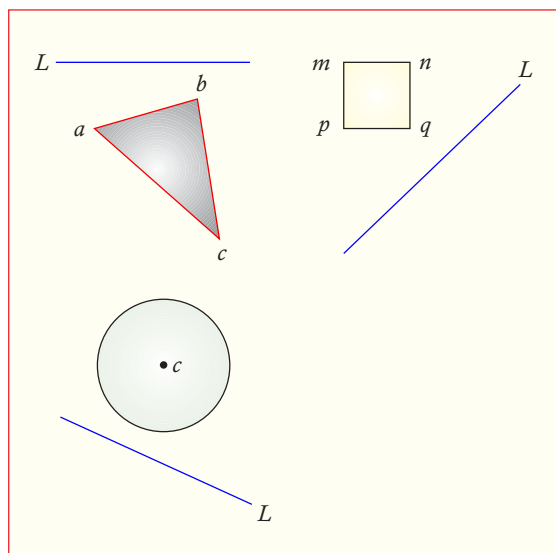


Fig. 13.8 Determina las imágenes de las figuras dadas, mediante una simetría alrededor del eje de simetría L . Ejercicio 13.2.

13.1 Mediante una simetría alrededor del eje L , determina las imágenes de P y de la recta R en la fig. 13.7.

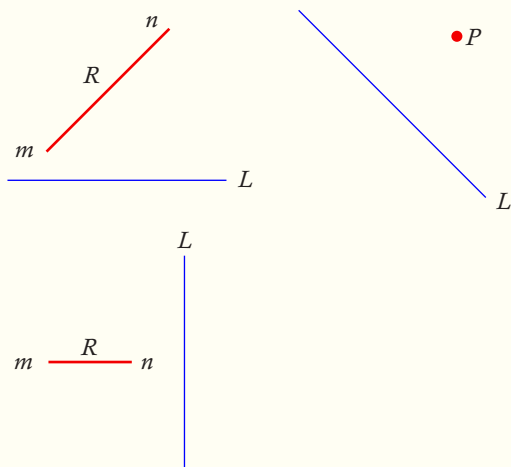


Fig. 13.7 Determina las imágenes de P y R usando una simetría con eje L . Ejercicio 13.1.

13.2 Determina, mediante simetrías axiales relativas al eje de simetría L , las imágenes de las figuras dadas en la fig. 13.8.

14

FIGURAS CONGRUENTES

14.1 FIGURAS Y ÁNGULOS CONGRUENTES

Se dice que dos figuras son congruentes cuando coinciden si se les superpone. Para que esto suceda, es necesario que las figuras tengan la misma forma e igual tamaño. En la fig. 14.1 se muestran figuras congruentes.

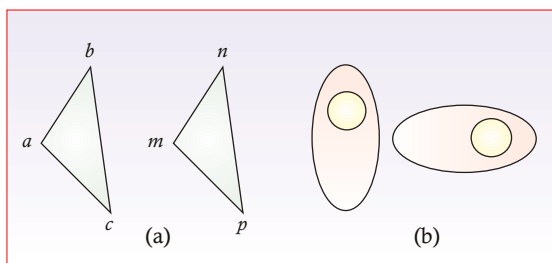


Fig. 14.1 Figuras congruentes.

De acuerdo a lo anterior, dos segmentos serán congruentes si tienen la misma longitud. Así, en la fig. 14.1(a), el segmento ab es congruente con el segmento mn porque ambos miden lo mismo:

$$ab \cong mn$$

Donde $\cong$ es el símbolo que indica congruencia. De la misma manera, se dice que *dos ángulos son congruentes si tienen igual amplitud de giro*. O también: *dos ángulos son congruentes si al superponerlos, sus lados coinciden*. En la fig. 14.2 se muestran ángulos congruentes. Como puedes ver, las medidas en cada caso son iguales.

Para la fig. 14.2(a), supongamos que el ángulo ABC se superpone al ángulo MNP , de manera que el lado BC coincida con el lado NP y que sus vértices B y N coincidan. Si en este caso el lado BA coincide con el lado NM , se dice, entonces, que los ángulos ABC y MNP son congruentes y escribimos:

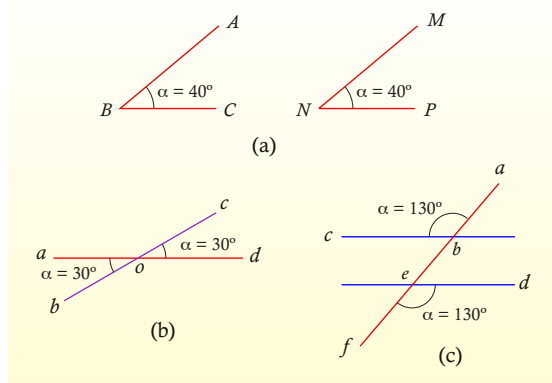


Fig. 14.2 Ángulos congruentes.

$$\angle ABC \cong \angle MNP$$

Donde se ha usado el símbolo $\angle$ para representar un ángulo. Para la fig. 14.2(b), supongamos que mediante una rotación alrededor del punto o superponemos al ángulo aob sobre el ángulo cod , de tal forma que el lado ob coincida con el lado oc . Entonces, el lado oa coincidirá con el lado od . Por lo tanto, los ángulos aob y cod son congruentes y escribiremos:

$$\angle aob \cong \angle cod$$

Para la fig. 14.2(c), supongamos que mediante una traslación se lleve al punto e a coincidir con el punto b , y luego, mediante una traslación alrededor del punto b hacemos superponer el ángulo def sobre el ángulo abc . Si el lado ef coincide con el lado ba , entonces, el lado ed coincidirá con el lado bc ; por lo tanto, los ángulos abc y def son congruentes, y escribiremos:

$$\angle abc \cong \angle def$$

14.2 TRANSFORMACIONES EN EL PLANO. CONGRUENCIA.

Ya estudiamos que cuando se aplican transformaciones en el plano: traslación, rotación o simetría axial, se conservan las distancias. Tales transformaciones son, por tanto, isometrías. No es difícil, entonces, imaginar que cuando a una figura se le aplica una transformación como las estudiadas, el resultado es una figura congruente con la original.

Cuando a una figura se le aplica una transformación isométrica en el plano (traslación, rotación o simetría), la imagen resultante es una figura congruente con la original.

En la fig. 14.3 se muestran figuras congruentes obtenidas por traslación, rotación y simetría.

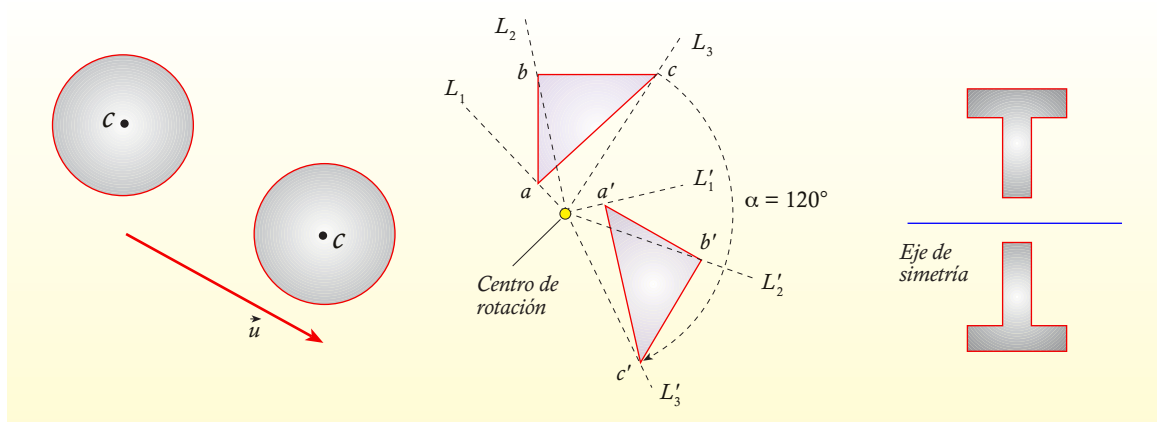


Fig. 14.3 Figuras congruentes obtenidas por traslación, rotación y simetría.

14.3 ELEMENTOS HOMÓLOGOS EN FIGURAS CONGRUENTES

Observa el triángulo Δabc de la fig. 14.4. Mediante el vector de traslación $\vec{u}$, se obtiene su imagen, $\Delta a'b'c'$, de forma que $\Delta abc \cong \Delta a'b'c'$.

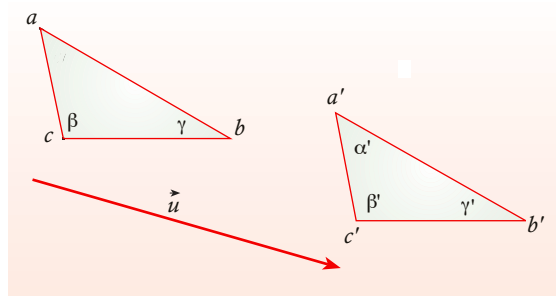


Fig. 14.4 El triángulo $\Delta a'b'c'$ es la imagen del triángulo Δabc . Las dos figuras son congruentes.

Si consideramos que el triángulo Δabc está formado

por los segmentos ab , bc y ca , podemos establecer lo siguiente:

El segmento $a'b'$ es la imagen del segmento ab : $a'b' \cong ab$. Los lados $a'b'$ y ab son elementos homólogos.

El segmento $b'c'$ es la imagen del segmento bc : $b'c' \cong bc$. Los lados $b'c'$ y bc son elementos homólogos.

El segmento $c'a'$ es la imagen del segmento ca : $c'a' \cong ca$. Los lados $c'a'$ y ca son elementos homólogos.

De la misma forma, para los ángulos α y α' , β y β' y γ y γ' , podemos decir:

El ángulo α' es la imagen del ángulo α : $\alpha \cong \alpha'$. Los ángulos α y α' son elementos homólogos.

El ángulo β' es la imagen del ángulo β : $\beta \cong \beta'$. Los ángulos β y β' son elementos homólogos.

El ángulo γ' es la imagen del ángulo γ : $\gamma \rightarrow \gamma'$.
Los ángulos γ y γ' son elementos homólogos.

En general, podemos afirmar:

Los elementos que conforman una figura plana y sus respectivas imágenes obtenidas mediante una traslación, rotación o simetría, se denominan elementos homólogos.

EJEMPLO 14.1

En la fig. 14.5 se muestra el cuadrilátero $\Delta mnpq$. Mediante una rotación de 90° , se obtiene la imagen $\Delta m'n'p'q'$. De acuerdo a lo descrito anteriormente, se puede decir:

$mn \rightarrow m'n' \quad np \rightarrow n'p' \quad pq \rightarrow p'q' \quad qm \rightarrow q'm'$

Similarmente, para los ángulos homólogos:

$\alpha \rightarrow \alpha' \quad \beta \rightarrow \beta' \quad \gamma \rightarrow \gamma' \quad \delta \rightarrow \delta'$

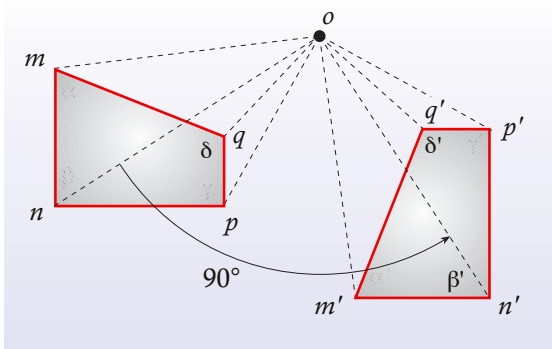


Fig. 14.5 Ejemplo 14.1.



14.1 Mediante una traslación según el vector $\vec{u}$, determina la figura congruente del cuadrilátero mostrado en la fig. 14.6 y señala los elementos homólogos.

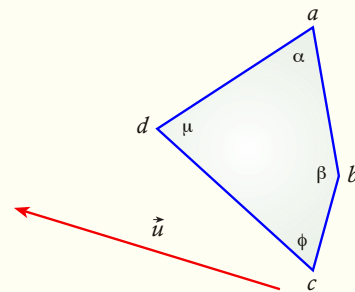


Fig. 14.6 Ejercicio 14.1.

14.2 Mediante una rotación de 70° con centro en O , determina la figura congruente del triángulo de la fig. 14.7 y señala los elementos homólogos.

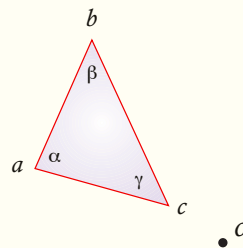


Fig. 14.7 Ejercicio 14.2.

15

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

15.1 CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Estudiamos en el objetivo anterior que, en general, dos figuras son congruentes si al aplicarles una transformación isométrica, coinciden en todos sus puntos. Este mismo concepto puede ser aplicado a dos triángulos cualesquiera; sin embargo, los criterios de congruencia de triángulos que estudiaremos a continuación, permiten establecer con más rapidez cuándo dos triángulos son congruentes.

a. Primer criterio de congruencia de triángulos (LLL): *dos triángulos son congruentes si sus tres lados homólogos son congruentes.* Entonces, los triángulos de la fig. 15.1 serán congruentes si se cumple:

$$ab \cong a'b' \quad bc \cong b'c' \quad ca \cong c'a'$$

Bajo las condiciones anteriores se puede escribir:

$$\Delta abc \cong \Delta a'b'c'$$

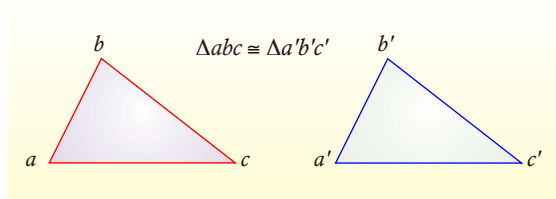


Fig. 15.1 Dos triángulos son congruentes si tienen sus lados homólogos congruentes.

EJEMPLO 15.1

En el cuadrilátero de la fig. 15.2 los triángulos Δabc y Δadc son congruentes porque sus lados homólogos también lo son:

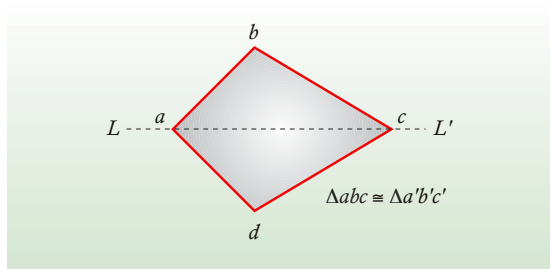


Fig. 15.2 Los triángulos Δabc y Δadc son congruentes por tener sus lados congruentes.

$$ab \cong da \quad bc \cong cd \quad ac \cong ca$$

Como podrás notar en la fig. 15.1, el triángulo $\Delta a'b'c'$ es la imagen del triángulo Δabc mediante una traslación. El lado ac es común para ambos triángulos. Observa, además, que el triángulo Δcda puede considerarse la imagen del triángulo Δabc mediante una simetría con respecto al eje LL' .

b. Segundo criterio de congruencia de triángulos (LAL): *dos triángulos son congruentes si tienen congruentes dos de sus lados homólogos y el ángulo comprendido entre los mismos.*

De acuerdo con este criterio, y haciendo referencia a la fig. 15.3, bastaría con saber si $ab \cong a'b'$, $ac \cong a'c'$ y $\alpha \cong \alpha'$ para afirmar que los dos triángulos son congruentes. α y α' son los ángulos comprendidos entre los lados homólogos. De la fig. 15.3 puedes ver que conocidos ab , ac , y α , la construcción del tercer lado, bc , es muy sencilla.

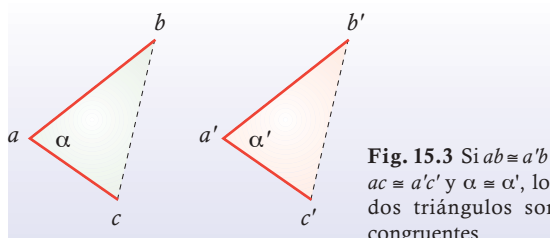


Fig. 15.3 Si $ab \cong a'b'$, $ac \cong a'c'$ y $\alpha \cong \alpha'$, los dos triángulos son congruentes.

EJEMPLO 15.2

Se tiene un triángulo en el cual las longitudes de los lados ab y ac son 25 mm y 40 mm, respectivamente. Si el ángulo comprendido entre esos lados mide 55° , dibuja un triángulo congruente con el dado.

Solución

En la fig. 15.4 se muestra una posible solución (¿será la única?). Para construir el triángulo, se dibuja el segmento ab formando un ángulo de 55° con la línea horizontal. Luego, a partir del punto a , se dibuja el segmento ac sobre la horizontal. Finalmente se unen los puntos b y c para obtener un triángulo congruente con el dado.

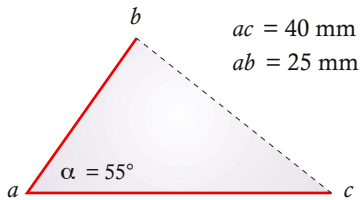


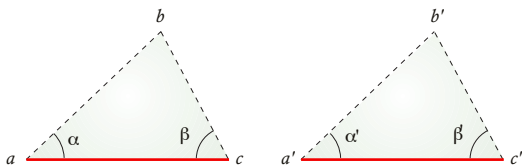
Fig. 15.4 Solución para el ejemplo 15.2.

c. Tercer criterio de congruencia de triángulos (ALA): dos triángulos son congruentes si tienen congruentes dos ángulos homólogos y el lado adyacente a dichos ángulos.

Así, en la fig. 15.5, los triángulos $\triangle abc$ y $\triangle a'b'c'$ son congruentes porque:

$$\alpha \cong \alpha' \quad \beta \cong \beta' \quad ac \cong a'c'$$

Al igual que en los casos anteriores, el triángulo $\triangle a'b'c'$ es la imagen del triángulo $\triangle abc$ mediante una traslación isométrica.

Fig. 15.5 Los triángulos $\triangle abc$ y $\triangle a'b'c'$ son congruentes porque $\alpha \cong \alpha'$, $\beta \cong \beta'$ y $ac \cong a'c'$.**EJEMPLO 15.3**

Se tiene un triángulo del cual se conocen la longitud del lado ab (40 mm) y los ángulos α y β , adyacentes al mismo, miden 25° y 105° , respectivamente. Dibuja un triángulo congruente con el dado.

Solución

Para dibujar el triángulo congruente, fig. 15.6, dibujamos primero el segmento ab . Luego, a partir de los extremos a y b de dicho segmento, medimos, usando un transportador, los ángulos α y β . El punto donde se cortan las rectas generadas por esos ángulos (líneas punteadas en la fig. 15.6), será el vértice c del triángulo.

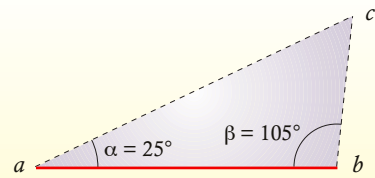


Fig. 15.6 Solución para el ejemplo 15.3.

EJEMPLO 15.4

En la fig. 15.7 x es el punto medio del lado ab y el segmento cx es perpendicular a ab en el punto x . Comprueba que $\triangle axc \cong \triangle bxc$.

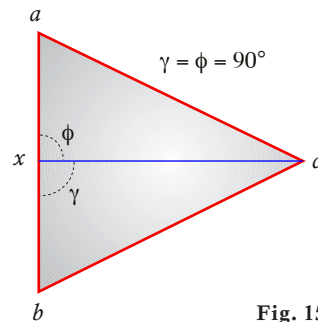


Fig. 15.7 Ejemplo 15.4.

Solución

El segmento cx divide al triángulo $\triangle abc$ en los triángulos $\triangle axc$ y $\triangle bxc$. Como x es el punto medio del lado ab , se tiene:

$$ax \equiv bx$$

El lado cx es común para ambos triángulos. Los ángulos ϕ ("fi") y γ ("gamma") miden ambos 90° y por lo tanto:

$$\phi \equiv \gamma$$

Entonces, los triángulos Δaxc y Δbxc son congruentes porque tienen dos lados y el ángulo comprendido entre los mismos respectivamente congruentes.

EJEMPLO 15.5

En la fig. 15.8 o es el centro del círculo y $ac \equiv bd$. Comprueba que $\Delta oac \equiv \Delta odb$.

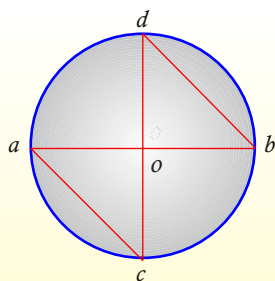


Fig. 15.8 Ejemplo 15.5.

Solución

Como los segmentos cd y ab son diámetros del círculo, se cumple:

$$od \equiv oc \equiv oa \equiv ob$$

ya que od , oc , oa y ob son todos radios del círculo. Como, según el enunciado, $ac \equiv bd$, los triángulos Δoac y Δodb tienen sus tres lados iguales y por lo tanto, son congruentes.



15.1 Usa el primer criterio de congruencia de triángulos (LLL) para demostrar que los

triángulos Δabd y Δbcd de la fig. 15.9(a) son congruentes.

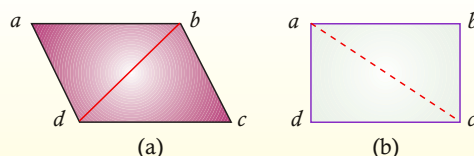


Fig. 15.9 Ejercicios 15.1 y 15.2.

15.2 Usa el segundo criterio de congruencia de triángulos (LAL) para demostrar que los triángulos Δabc y Δcda de la fig. 15.9(b) son congruentes.

15.3 Se tiene un triángulo cuyos lados ab , bc y ca miden 30 mm, 24 mm y 40 mm. Construye un triángulo congruente con el mismo.

15.4 Se tiene un triángulo en el cual las medidas de los lados ab y ac son 40 mm y 3,5 mm. Si el ángulo comprendido entre los lados anteriores mide 75° , dibuja dos triángulos congruentes con el dado.

15.5 En la fig. 15.10 los ángulos bac y dac son congruentes. Comprueba, usando el tercer criterio de congruencia de triángulos (ALA), que los triángulos Δabc y Δadc son congruentes.

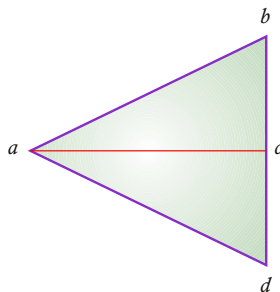


Fig. 15.10 Ejercicio 15.5.

15.6 Un lado de un triángulo mide 40 mm y los ángulos adyacentes al mismo miden 40° y 50° . Dibuja un triángulo congruente con el dado.

16

ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

16.1 RECTAS SECANTES. ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE.

Se dice que dos rectas son *secantes* cuando se cortan o interceptan en un punto. Al punto donde las rectas se cortan se le denomina *punto de intersección*. En la fig. 16.1 se muestran las rectas secantes R_1 y R_2 .

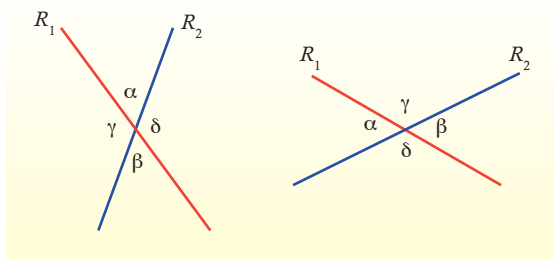


Fig. 16.1 Las rectas secantes R_1 y R_2 forman cuatro ángulos. Los ángulos α y β son congruentes. Los ángulos γ y δ también son congruentes.

Como puedes notar, las rectas al cortarse forman cuatro ángulos cuyos vértices corresponden al punto de intersección. Los ángulos α y β son *ángulos opuestos por el vértice*. De la misma forma, los ángulos γ y δ son también ángulos opuestos por el vértice. Si efectuáramos la medida de los ángulos α y β , encontraríamos que ambos miden lo mismo. Similarmente, los ángulos γ y δ tienen igual medida. Podemos entonces afirmar:

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Para demostrar que dos ángulos opuestos por el vértice tienen igual medida, considera la fig. 16.2. Se tiene:

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \quad (16.1)$$

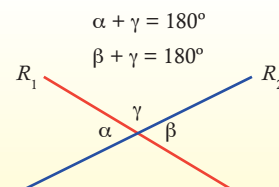


Fig. 16.2 Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

ya que α y γ son ángulos suplementarios. Similarmente:

$$\beta + \gamma = 180^\circ \quad (16.2)$$

porque β y γ también son ángulos suplementarios. De (16.1) y (16.2):

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$$

Es decir, α y β tienen la misma medida y, por lo tanto, son ángulos congruentes.

16.2 DEFINICIÓN DE ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

En la fig. 16.3 se representan dos rectas secantes.

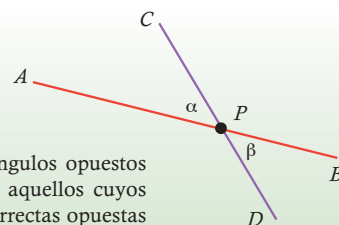


Fig. 16.3 Dos ángulos opuestos por el vértice son aquellos cuyos lados son las semirrectas opuestas de los lados del otro ángulo.

La recta AB está dividida en las semirrectas AP y PB , mientras que la recta CD está dividida en las semirrectas CP y PD . El ángulo α está formado por las semirrectas AP y CP , mientras que el ángulo β está formado por las semirrectas PB y PD .

De la figura 16.3 se observa que el lado AP del ángulo α es opuesto al lado PB del ángulo β y que el lado CP del ángulo α es opuesto al lado PD del ángulo β . De acuerdo con esto, podemos afirmar:

Dos ángulos opuestos por el vértice son aquellos cuyos lados son las semirrectas opuestas de los lados del otro ángulo.

Otra definición de ángulos opuestos por el vértice puede obtenerse en base a lo que ya estudiaste sobre rotaciones. Considera la fig. 16.4. Tomando como centro el punto P , efectuemos una rotación de la semirrecta CP un ángulo de 180° . El resultado es la semirrecta PD . Nuevamente, con centro en P , rotamos la semirrecta AP un ángulo de 180° . El resultado es la semirrecta PB . Las dos semirrectas obtenidas, PD y PB , conforman el ángulo β , opuesto por el vértice al ángulo α .

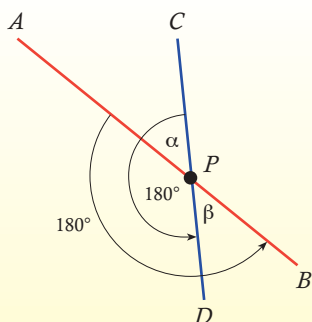


Fig. 16.4 Dos ángulos opuestos por el vértice son los que resultan al rotar 180° los lados que lo conforman, alrededor del vértice común.

De acuerdo a lo anterior, podemos concluir:

Dos ángulos opuestos por el vértice son aquellos que resultan al rotar 180° , alrededor del vértice común, los lados que los conforman.

EJEMPLO 16.1

En la fig. 16.5, las rectas R_1 , R_2 y R_3 se intersectan en un solo punto. De acuerdo a lo tratado anteriormente:

$$\alpha \cong \phi \quad \beta \cong \lambda \quad \gamma \cong \mu$$

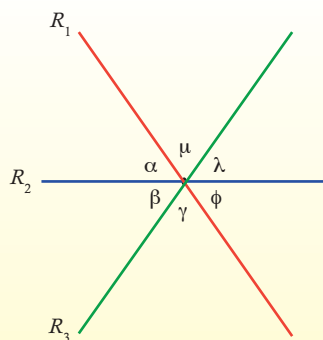


Fig. 16.5 Ejemplo 16.1.

EJEMPLO 16.2

En la fig. 16.6 se tienen dos rectas r y r' cortadas por una recta secante S y se forman cuatro pares de ángulos opuestos por el vértice.

De acuerdo con la definición de ángulos opuestos por el vértice, podemos escribir:

$$\alpha \cong \chi \quad \beta \cong \delta \quad \varepsilon \cong \gamma \quad \phi \cong \eta$$

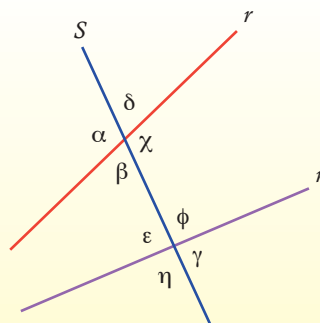
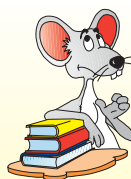


Fig. 16.6 Ejemplo 16.2.



EJERCICIOS



16.1 En la fig. 16.7 establece los ángulos opuestos por el vértice.

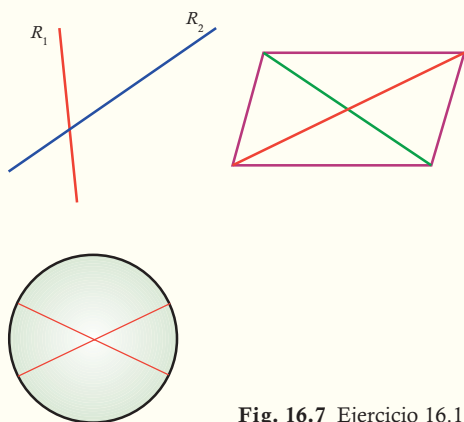
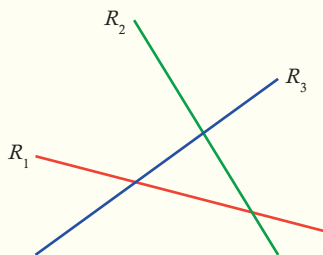
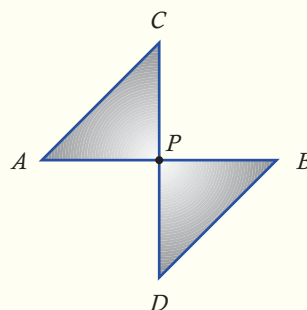


Fig. 16.7 Ejercicio 16.1.

16.2 Determina los ángulos opuestos por los vértices formados por las rectas R_1 , R_2 y R_3 de la fig. 16.8.



16.3 En la fig. 16.9, P es el punto medio de los segmentos AB y CD . a) Comprueba que los triángulos $DACP$ y $DBDP$ son congruentes. b) Demuestra que $AC \cong BD$.



17

RECTAS PARALELAS Y
RECTAS SECANTES17.1 ÁNGULOS FORMADOS POR UNA
RECTA SECANTE A DOS RECTAS
PARALELAS

Se dice que dos rectas pertenecientes a un plano son paralelas si no se interceptan. En la fig. 17.1 se presentan dos rectas paralelas y dos rectas secantes. Las rectas secantes se interceptan en un punto.

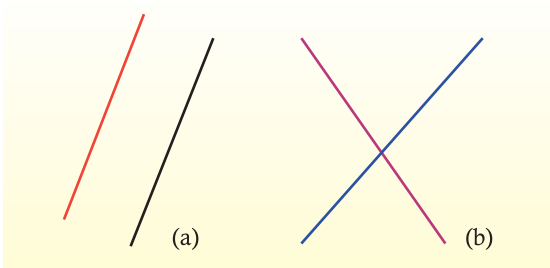


Fig. 17.1 (a) Rectas paralelas. (b) Rectas secantes.

Consideremos ahora dos rectas paralelas, L_1 y L_2 , interceptadas por una recta secante S , tal como se muestra en la fig. 17.2.

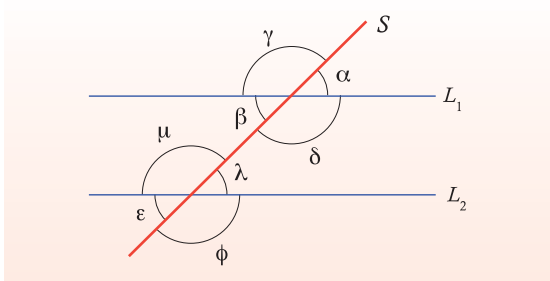


Fig. 17.2 Una recta secante a dos rectas paralelas forma ocho ángulos con las mismas.

Como puedes ver, S corta a L_1 y L_2 en dos puntos distintos y forma con ellas ocho ángulos:

α (alfa) β (beta) γ (gamma) δ (delta)
 ϵ (epsilon) λ (lambda) μ (miu) ϕ (fi)

17.2 ÁNGULOS CORRESPONDIENTES

De los ocho ángulos formados por una recta secante a dos rectas paralelas, se designan como *ángulos correspondientes* a los mostrados en la fig. 17.3.

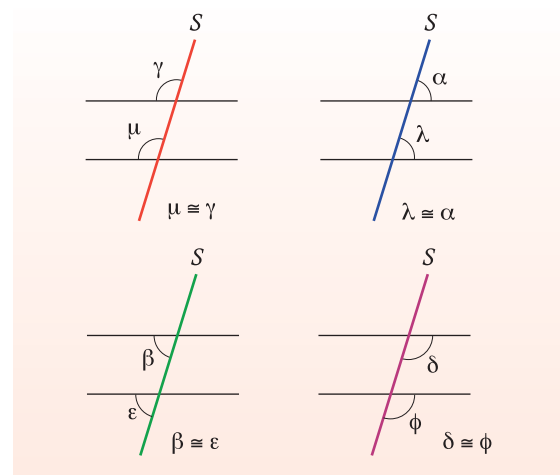


Fig. 17.3 Ángulos correspondientes formados por una recta secante a dos rectas paralelas.

Los ángulos correspondientes son congruentes y por lo tanto, para la fig. 17.3 se puede escribir:

$$\gamma \cong \mu \quad \lambda \cong \alpha \quad \beta \cong \epsilon \quad \delta \cong \phi$$

17.3 ÁNGULOS ALTERNOS INTERNOS

Los *ángulos alternos internos* formados por una recta secante a dos rectas paralelas, se indican en la fig. 17.4.

Los *ángulos alternos internos* son congruentes y se tendrá:

$$\beta \cong \lambda \quad \mu \cong \delta$$

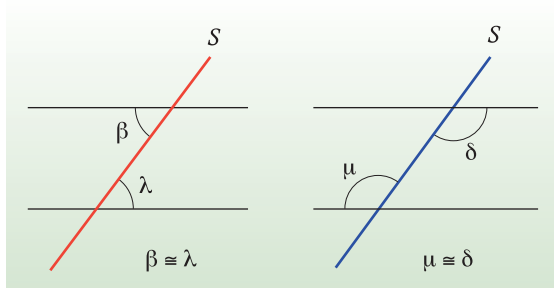


Fig. 17.4 Ángulos alternos internos formados por una recta secante a dos rectas paralelas.

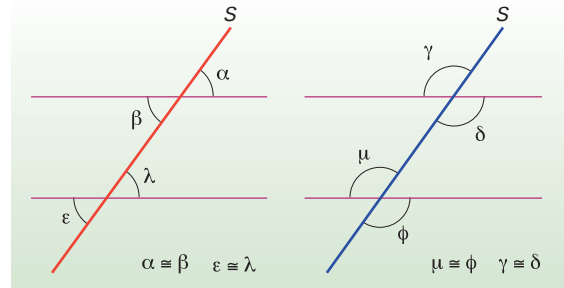


Fig. 17.6 Ángulos opuestos por el vértice formados por una recta secante a dos rectas paralelas.

17.4 ÁNGULOS ALTERNOS EXTERNOS

Los *ángulos alternos externos* formados por una recta secante a dos rectas paralelas, se indican en la fig. 17.5.

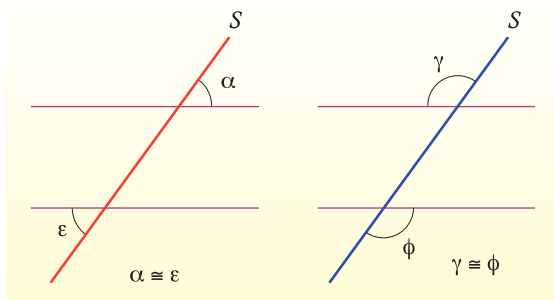


Fig. 17.5 Ángulos alternos externos formados por una recta secante a dos rectas paralelas.

Los *ángulos alternos externos* son congruentes. Es decir, para la fig. 17.5 se cumple:

$$\alpha \cong \epsilon \quad \gamma \cong \phi$$

17.5 ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

Cuando una recta es secante a dos rectas paralelas, se forman los *ángulos opuestos por el vértice*, mostrados en la fig. 17.6. Para los ángulos opuestos por el vértice de la fig. 17.6, se tendrá:

$$\alpha \cong \beta \quad \epsilon \cong \lambda \quad \gamma \cong \delta \quad \mu \cong \phi$$

EJEMPLO 17.1

Si el ángulo α de la fig. 17.7 mide 60° , determina

la medida de los otros ángulos.

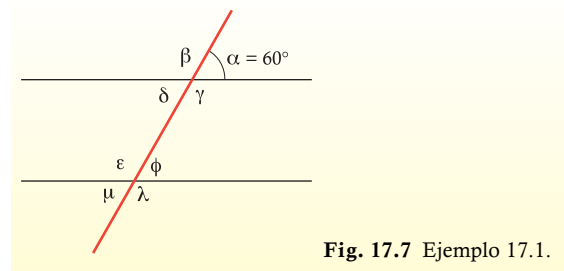


Fig. 17.7 Ejemplo 17.1.

Solución

Dado que los ángulos α y β son suplementarios, su suma es 180° y por lo tanto:

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

El ángulo δ es opuesto por el vértice a α , luego:

$$\delta = 60^\circ$$

El ángulo γ es opuesto por el vértice a β , luego:

$$\gamma = 120^\circ$$

Los ángulos α y ϕ son correspondientes, luego:

$$\phi \cong \alpha = 60^\circ$$

Los ángulos β y ϵ son correspondientes, luego:

$$\beta \cong \epsilon = 120^\circ$$

Los ángulos δ y μ son correspondientes, luego:

$$\delta \cong \mu = 60^\circ$$

Los ángulos λ y γ son correspondientes, luego:

$$\lambda \cong \gamma = 120^\circ$$

Nota que en la solución de este problema pudieron usarse, también, los ángulos alternos internos y alternos externos.

EJEMPLO 17.2

Las rectas S_1 y S_2 de la fig. 17.8 son paralelas y secantes a las rectas paralelas R_1 y R_2 . Si $\alpha = 75^\circ$, halla la medida de los ángulos β y γ .

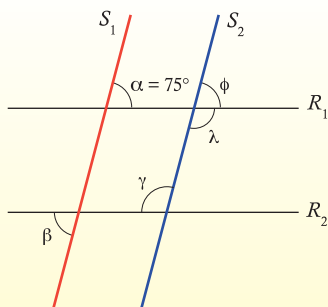


Fig. 17.8 Ejemplo 17.2.

α y β son congruentes por ser ángulos alternos externos; entonces, sus medidas son las mismas:

$$\beta = 75^\circ$$

El ángulo ϕ mide igual que el ángulo α :

$$\phi = 75^\circ$$

El ángulo λ es complementario con ϕ y por tanto:

$$\lambda = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

Los ángulos γ y λ son ángulos alternos internos y por lo tanto congruentes, luego:

$$\gamma = 105^\circ$$

El procedimiento anterior no es el único para resolver este ejemplo. ¿Podrías encontrar otro procedimiento?

EJEMPLO 17.3

En el triángulo rectángulo de la fig. 17.9, determina la medida de los ángulos α , β y ϕ .

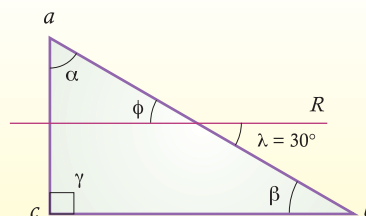


Fig. 17.9 Ejemplo 17.3.

Solución

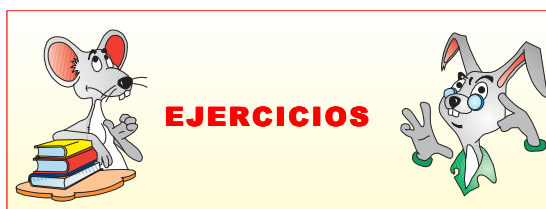
El lado ab es secante a la recta R y al lado bc . Los ángulos λ y ϕ son opuestos por el vértice y por lo tanto: $\phi = 30^\circ$. El ángulo β es correspondiente con ϕ : $\beta = 30^\circ$. Como los ángulos internos de un triángulo suman 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

El ángulo γ es un ángulo recto y mide 90° , por lo que la relación anterior se puede escribir como:

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$



17.1 Si el ángulo α de la fig. 17.10 mide 57° , determina la medida de los otros ángulos.

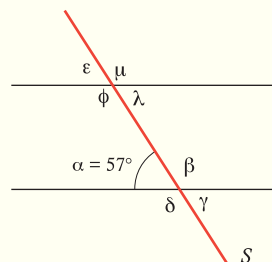


Fig. 17.10 Ejercicio 17.1.

17.2 Si la recta S de la fig. 17.11 es secante a las rectas paralelas R_1 y R_2 y el ángulo α mide 70° , determina el resto de los ángulos.

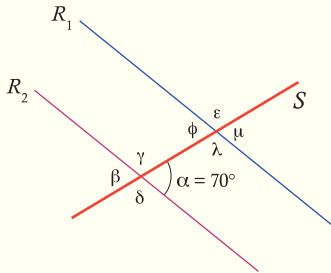


Fig. 17.11 Ejercicio 17.2.

17.3 Si α mide 40° en la fig. 17.12, determina los valores de β , λ y ϕ .

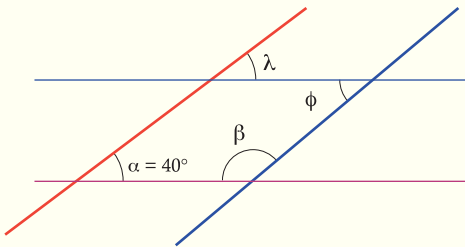


Fig. 17.12 Ejercicio 17.3.

17.4 Determina el valor de los ángulos β , γ , ϕ y δ de la fig. 17.13.

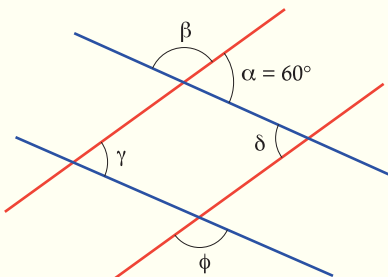


Fig. 17.13 Ejercicio 17.4.

17.5 En la fig. 17.14, la recta R es paralela al lado bc . Determina los ángulos α , β y ϕ .

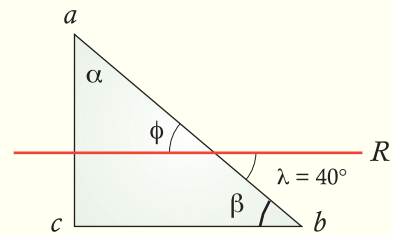


Fig. 17.14 Ejercicio 17.5.

17.6 Determina los ángulos α y β en la fig. 17.15.

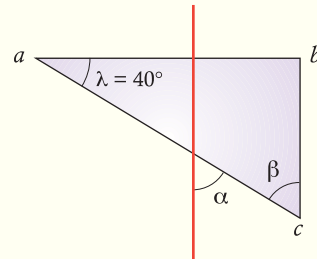


Fig. 17.15 Ejercicio 17.6.

18

LA FUNCIÓN POLINÓMICA

18.1 LA FUNCIÓN POLINÓMICA DE UNA VARIABLE. DEFINICIONES BÁSICAS.

A las relaciones del tipo:

$$f(x) = 2x \qquad f(x) = -5x^3 + 3x^2 - \frac{7}{9}x - 3$$

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2 - 3x + 1 \qquad f(x) = x^5 - 1$$

se les denomina *funciones polinómicas de la variable x* . A cada elemento de la variable x corresponde otro elemento de la función $f(x)$ de acuerdo con la relación entre x y $f(x)$. En este curso se considerará que el dominio y el rango de la función polinómica es el conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales. En cursos posteriores se ampliará el dominio y rango de la función polinómica a otros conjuntos numéricos. En general, una función polinómica de la variable x puede expresarse de la forma siguiente:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0 \quad (18.1)$$

El segundo miembro de la relación (18.1):

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0 \quad (18.2)$$

recibe el nombre de **polinomio**.

Como $x^1 = x$ y $x^0 = 1$, la relación general (18.2) para un polinomio se escribe como:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (18.3)$$

A cada uno de los sumandos de la relación (18.3) se les denomina **términos** del polinomio. La expresión anterior corresponde a un polinomio de muchos términos, de allí los puntos suspensivos que figuran en ella.

Ejemplos de polinomios de un número limitado de términos, escritos de manera similar a la relación (18.3) son:

$$a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a^0 \quad (6 \text{ términos})$$

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a^0 \quad (4 \text{ términos})$$

$$a_1 x + a^0 \quad (2 \text{ términos})$$

a_0 , que acompañan a las potencias de x , se les denomina **coeficientes**. Entonces, en el polinomio:

$$5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x^0$$

se tiene:

El coeficiente del término $5x^4$ es 5 ($a_4 = 5$)

A los números racionales $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1,$

El coeficiente del término x^3 es -3 ($a_3 = -3$)

El coeficiente del término $2x^2$ es 2 ($a_2 = 2$)

El coeficiente del término $-\frac{3}{4}x$ es $-\frac{3}{4}$ ($a_1 = -\frac{3}{4}$)

El coeficiente del término $\frac{1}{2}x^0$ es $\frac{1}{2}$ ($a_0 = \frac{1}{2}$)

De acuerdo a la relación (18.3), los exponentes n , $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1 de la variable x , son números naturales que determinan el **grado** de cada término. Así, en el polinomio:

$$\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

El grado del término $\frac{2}{3}x^3$ es 3, el grado del término $5x^2$ es 2, el grado del término $-3x$ es 1 y el grado del término 2 es 0, ya que $2 = 2x^0$.

El **grado de un polinomio** es el mayor exponente al cual aparece elevada la variable x . Para el polinomio:

$$8x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 2x - 4$$

el grado es 5, ya que el mayor exponente al cual está elevada la variable x es 5.

Al término a_0 en la relación (18.3) se le denomina **término independiente**, ya que usualmente no se escribe acompañado de la variable x . Para el polinomio:

$$\frac{3}{5}x^2 + 3x - 2$$

el término independiente es -2 .

Para el polinomio:

$$5x^3 - 3x^2 + x + 1$$

el término independiente es 1

Algunos polinomios carecen de ciertos términos; es decir, los coeficientes de estos términos son nulos. A tales polinomios se les llama **incompletos**. Por ejemplo:

$$x^4 + 3x^2 - \frac{2}{3}$$

es un polinomio incompleto, ya que carece de los coeficientes de x^3 y x . Dicho polinomio se puede escribir como:

$$x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - \frac{2}{3}$$

El polinomio:

$$-5x^7 + 3x^4 + x - 2$$

carece de los coeficientes de x^6 , x^5 , x^3 y x^2 . Dicho polinomio se puede escribir como:

$$-5x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x - 2$$

EJEMPLO 18.1

Dados los polinomios:

$$\text{a) } 11x^3 - 3x^2 + 5x - 1 \quad \text{b) } 5x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x + \frac{3}{8}$$

especifica los términos, los coeficientes, el grado del polinomio y el término independiente.

Solución

a) Términos: $11x^3, -3x^2, 5x, -1$
 Grado del polinomio: 3
 Coeficientes: 11, -3 , 5, -1
 Término independiente: -1

b) Términos: $5x^4, -\frac{1}{3}x^3, -2x, \frac{3}{8}$
 Grado del polinomio: 4
 Coeficientes: 5, $-\frac{1}{3}$, 0, -2 , $\frac{3}{8}$
 Término independiente: $\frac{3}{8}$

EJEMPLO 18.2

Dados los polinomios:

$$\text{a) } 5x^4 - 2x^2 \quad \text{b) } \frac{4}{7}x^3 + 1$$

Escríbelos con todas las potencias de x y especifica

los coeficientes, el grado del polinomio y los términos independientes.

Solución

a) $5x^4 - 2x^2 = 5x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 0$

Coeficientes: 5, 0, -2, 0, 0

Grado: 4

Término independiente: 0

b) $\frac{4}{7}x^3 + 1 = \frac{4}{7}x^3 + 0x^2 + 0x + 1$

Coeficientes: $\frac{4}{7}$, 0, 0, 1

Grado: 3

Término independiente: 1

18.2 FUNCIONES POLINÓMICAS Y NO POLINÓMICAS

Una función polinómica reúne las siguientes características:

- Cada término es el producto de un número racional por una potencia de la variable x .
- El exponente de la variable x es un número natural.
- Los distintos términos que forman el polinomio están enlazados por operaciones de adición y sustracción.

Las funciones que no puedan representarse siguiendo las características anteriores son funciones no polinómicas. Como ejemplos de funciones no polinómicas, podemos citar:

1) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{3x} + 1 = 3x^2 - \frac{1}{3}x^{-1} + 1$

Como puedes observar, el exponente de x es -1,

que no es un número natural.

2) $g(x) = 5x^4 + \frac{2x^2 - 4}{5x^3 + 1} - 2$

Aparte de las operaciones de adición y sustracción, el término:

$$\frac{2x^2 - 4}{5x^3 + 1}$$

indica una operación de división.

3) $h(x) = \sqrt{2}x + 1$

El coeficiente de x^2 , $\sqrt{2}$, no es un número racional.

18.3 ORDENACIÓN DE POLINOMIOS

Los polinomios se pueden ordenar en orden creciente o decreciente. Un polinomio se dice que está ordenado en orden creciente si se escribe de manera que el grado de sus términos aumenta de izquierda a derecha. Por ejemplo, el polinomio siguiente está ordenado en orden creciente:

$$\begin{array}{ccccccccc} -2 & + & 3x & + & \frac{1}{5}x^2 & - & 8x^3 & + & 7x^4 \\ \text{Grado 0} & & \text{Grado 1} & & \text{Grado 2} & & \text{Grado 3} & & \text{Grado 4} \end{array}$$

→
Orden creciente

Por el contrario, un polinomio está ordenado en orden decreciente si se escribe de manera que el grado de sus términos disminuye de izquierda a derecha. El polinomio anterior ordenado en orden decreciente será:

$$\begin{array}{ccccccccc} 7x^4 & - & 8x^3 & + & \frac{1}{5}x^2 & + & 3x & - & 2 \\ \text{Grado 4} & & \text{Grado 3} & & \text{Grado 2} & & \text{Grado 1} & & \text{Grado 0} \end{array}$$

←
Orden decreciente

Cuando un polinomio es incompleto, es usual añadir los términos ausentes con coeficientes iguales a cero antes de hacer una ordenación

creciente o decreciente del mismo. Así, por ejemplo, el polinomio:

$$\frac{1}{3}x^4 - 2 + 6x^3 + x^6$$

puede ser ordenado de manera decreciente de la forma siguiente:

$$x^6 + 0x^5 + \frac{1}{3}x^4 + 6x^3 + 0x^2 + 0x - 2$$

EJEMPLO 18.3

Determina cuáles de las siguientes expresiones son polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$:

- a) $-3x^2 + 4x - 2$ b) $\frac{1}{x^2}$
 c) $1 + \frac{3x-2}{x^2+4} + 3x^4$ d) $\pi x + 1$ e) $-1 + 2x$

Solución

- a) La expresión es un polinomio ya que todos los coeficientes son números racionales, las potencias de x son números naturales y los distintos miembros de la expresión están unidos por operaciones de adición y sustracción.
- b) La expresión no es un polinomio, ya que $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ tiene un exponente negativo.
- c) La presencia del término $\frac{3x-2}{x^2+4}$ sugiere un cociente y, por tanto, la expresión no es un polinomio.
- d) El coeficiente de la x , π , no es un número racional y por tanto la expresión no es un polinomio.
- e) La expresión es un polinomio.

EJEMPLO 18.4

Ordena en orden creciente y decreciente los siguientes polinomios:

a) $-5 + 3x^3 + 2x + x^2$ b) $3x^2 + \frac{4}{3} - 2x^3 + 2x$

c) $\frac{1}{2}x^2 + 6 - 4x^4$ d) $3x^2 - 7x^5 + 4$

Solución

a) Orden creciente: $-5x^0 + 2x + x^2 + 3x^3$
 Orden decreciente: $3x^3 + x^2 + 2x - 5x^0$

b) Orden creciente: $\frac{4}{3}x^0 + 2x^1 + 3x^2 - 2x^3$

Orden decreciente: $-2x^3 + 3x^2 + 2x^1 + \frac{4}{3}x^0$

c) Orden creciente: $6x^0 + 0x^1 + \frac{1}{2}x^2 + 0x^3 - 4x^4$

Orden decreciente: $-4x^4 + 0x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 0x^1 + 6x^0$

d) Orden creciente: $4x^0 + 0x + 3x^2 + 0x^3 + 0x^4 - 7x^5$

Orden decreciente: $-7x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 4x^0$

18.4 TÉRMINOS SEMEJANTES. POLINOMIOS IGUALES. POLINOMIOS NULOS Y CONSTANTES.

Dados dos polinomios cualesquiera, se denominan **términos semejantes** a aquellos que tienen el mismo grado. Así, si consideramos los polinomios:

$$5x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 4 \quad -2x^3 + x^2 + 2x + 1$$

los términos semejantes son:

$$\begin{array}{ll} (5x^3 \text{ y } -2x^3) & \left(-\frac{1}{2}x^2 \text{ y } x^2\right) \\ (x \text{ y } 2x) & (-4 \text{ y } 1) \end{array}$$

Se dice que dos polinomios son iguales si sus términos semejantes son iguales.

Se dice que un polinomio es nulo si todos sus coeficientes son iguales a cero.

Un polinomio constante es aquel que sólo posee el término independiente.

Como ejemplos de polinomios constantes tenemos:

$$f(x) = -3 \quad f(x) = 1 \quad g(x) = -\frac{3}{4}$$

Un polinomio constante tiene grado 0. En general, un polinomio constante se puede escribir de la forma:

$$f(x) = a_0 x^0 = a_0 \quad \text{grado cero}$$

18.5 CLASIFICACIÓN DE LOS POLINOMIOS SEGÚN EL NÚMERO DE TÉRMINOS

De acuerdo al número de términos, los polinomios pueden clasificarse en:

- a) **Monomios**: son polinomios con todos los coeficientes, menos uno de ellos, iguales a cero. Entonces, un monomio consta de un solo término no nulo. Las siguientes expresiones son ejemplos de monomios:

$$f(x) = -3x^2 \quad g(x) = \frac{1}{3}x^5 \quad h(x) = 2$$

- b) **Binomios**: son polinomios con todos los coeficientes iguales a cero, excepto dos de ellos. Entonces, un binomio consta solamente de dos términos no nulos. Como ejemplos de binomios tenemos:

$$f(x) = x^2 + 5 \quad g(x) = -\frac{3}{7}x^3 + 1 \quad h(x) = x^7 - 4x^2$$

- c) **Trinomios**: son polinomios con todos los coeficientes iguales a cero, excepto 3 de ellos. Un trinomio consta solamente de 3 términos no nulos. Como ejemplos de trinomios tenemos:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 \quad g(x) = \frac{1}{4}x^3 + 3x + 5$$

$$h(x) = 4x^2 - 7x + 8x$$

A partir de 4 términos, a los polinomios no se les asignan nombres especiales.

EJEMPLO 18.5

Especifica el nombre y el grado de cada polinomio:

- a) $-3x^2$ b) $5x^2 + 1$
c) $2x^7 + \frac{1}{3}x^3 - 4$ d) $x^5 - 3x^2 + x - 8$

Solución

- a) $-3x^2$: monomio, grado 2
b) $5x^2 + 1$: binomio, grado 2
c) $2x^7 + \frac{1}{3}x^3 - 4$: trinomio, grado 7
d) $x^5 - 3x^2 + x - 8$: polinomio, grado 5

EJEMPLO 18.6

Dados los polinomios:

- a) $3x^3 - 2x^2 + x - 4$ b) $7x^5 - 3x^3 + 8x$

Determina sus grados, clasifícalos, ordénalos en orden creciente, e identifica los términos, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$, de acuerdo a la relación 18.3.

Solución

- a) $3x^3 - 2x^2 + x - 4$: grado 3, polinomio

Orden creciente: $-4 + x - 2x^2 + 3x^3$

Términos: $a_0 = -4$ $a_1 = 1$ $a_2 = -2$ $a_3 = 3$

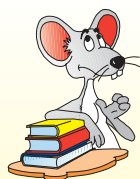
- b) $7x^5 - 3x^3 + 8x$: grado 5, trinomio

Orden creciente: $0 + 8x + 0x^2 - 3x^3 + 0x^4 + 7x^5$

Términos:

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 8 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -3$$

$$a_4 = 0 \quad a_5 = 7$$

**EJERCICIOS**

18.1 Dados los siguientes polinomios:

a) $-4x^2 + x^3 - x^4$

b) $-2x^2 + 5x - 8$

c) $5x^5 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{5}$

d) $7x^6 - 4x^2$

especifica: los términos, el grado, los coeficientes y el término independiente.

18.2 Di cuál de las siguientes expresiones son polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$:

a) $-3x^2 - 1$

b) $-3x^{-3} + 3x^2 + 5$

c) $5x^2 - \frac{3}{x} + 5$

d) $8x^5 + 3x^2 - p$

e) $\frac{4x^2 - 1}{3x^6} - 1$

f) $8x^2 - \sqrt{2}$

18.3 Ordena los siguientes polinomios en forma creciente y decreciente mostrando todas las potencias de x , clasifícalos según el número de términos y especifica sus grados:

a) $8x^4 - \frac{2}{3}x^5 + 2x^3 - x$

b) $-5x + 1 - 3x^4 + \frac{4}{9}x^2$

c) $x^5 - 1$

d) $-2x^2 + \frac{2}{7}x^0 + \frac{3}{8}x$

19

ADICIÓN DE POLINOMIOS

19.1 EXPRESIÓN POLINÓMICA DE UN NÚMERO NATURAL

Considera el número natural 2.574. En tus cursos anteriores has estudiado cómo se expresan números naturales en forma de potencias de 10. Para 2.574 se tiene:

$$2.574 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

A la representación anterior también se le conoce como *expresión polinómica de un número natural*. Otros ejemplos son:

$$124 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

$$1.458 = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

$$37.414 = 3 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

19.2 ADICIÓN DE DOS NÚMEROS NATURALES EXPRESADOS EN FORMA POLINÓMICA

Supongamos que vamos a sumar los números 3.142 y 1.254. El método de suma que ya conoces te permite obtener:

$$\begin{array}{r} 3.142 \\ + 1.254 \\ \hline 4.396 \end{array}$$

Las expresiones polinómicas para los sumandos y para la suma son:

$$\begin{array}{lcl} \text{Sumando} & \longrightarrow & 3.142 = 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 \\ \text{Sumando} & \longrightarrow & 1.254 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \\ \text{Suma} & \longrightarrow & 4.396 = 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 \\ & & \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (3+1) & (1+2) & (4+5) & (2+4) \end{array} \end{array}$$

Como puedes darte cuenta de lo anterior, los coeficientes de las distintas potencias de 10 de la suma se obtienen sumando los coeficientes correspondientes de las potencias de 10 de los sumandos. Es decir,

$$4 \cdot 10^3 = (3 + 1)10^3 \quad 3 \cdot 10^2 = (1 + 2)10^2 \quad 9 \cdot 10^1 = (4 + 5)10^1 \quad 6 \cdot 10^0 = (2 + 4)10^0$$

En otras palabras, se han sumado los términos semejantes de las expresiones polinómicas de los números dados para obtener la expresión polinómica de la suma. Este mismo procedimiento se utilizará para realizar la adición de dos o más polinomios.

19.3 ADICIÓN DE MONOMIOS

En la adición de dos monomios se pueden distinguir dos casos distintos:

a) **Los monomios tienen igual grado:** en este caso los monomios son términos semejantes. Sean los monomios:

$$f(x) = 3x^3 \quad g(x) = 6x^3$$

Su suma será:

$$f(x) + g(x) = 3x^3 + 6x^3 = (3 + 6)x^3 = 9x^3$$

Lo anterior sugiere que *para sumar monomios de igual grado se suman los coeficientes de la potencia de x . El resultado es del mismo grado que los sumandos.*

EJEMPLO 19.1

Efectúa la adición de los siguientes monomios:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 2x^4 \text{ y } x^4 & \text{b)} \frac{3}{4}x^5 \text{ y } \frac{2}{3}x^5 & \text{c)} 3x^7 \text{ y } -2x^7 \\ \text{d)} -5x^2 \text{ y } 3x^2 & \text{e)} \frac{3}{8}x^3 \text{ y } -2x^3 \end{array}$$

Solución

$$\text{a)} 2x^4 + x^4 = (2 + 1)x^4 = 3x^4$$

$$\text{b)} \frac{3}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^5 = \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right)x^5 = \left(\frac{9+8}{12}\right)x^5 = \frac{17}{12}x^5$$

$$\text{c)} 3x^7 + (-2x^7) = [3 + (-2)]x^7 = (3 - 2)x^7 = x^7$$

$$\text{d)} -5x^2 + 3x^2 = (-5 + 3)x^2 = -2x^2$$

$$\text{e)} \frac{3}{8}x^3 + (-2x^3) = \left(\frac{3}{8} - 2\right)x^3 = \left(\frac{3-16}{8}\right)x^3 = -\frac{13}{8}x^3$$

b) **Los monomios tienen distintos grados:** cuando los monomios tienen distintos grados no son términos semejantes y por tanto sus coeficientes no pueden sumarse. La adición, entonces, queda indicada y es igual a un binomio. Sean los monomios:

$$f(x) = 3x^2 \quad g(x) = 7x^5$$

Su suma será:

$$f(x) + g(x) = 3x^2 + 7x^5 \quad (\text{Un binomio})$$

EJEMPLO 19.2

Efectúa la adición de los siguientes monomios:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} -5x^3 \text{ y } -2x^7 & \text{b)} -\frac{3}{5} \text{ y } x^5 \\ \text{c)} 4x^2 \text{ y } -x^2 & \text{d)} -\frac{1}{3}x^2 \text{ y } 4x \end{array}$$

Solución

$$\text{a)} -5x^3 + (-2x^7) = -5x^3 - 2x^7$$

$$\text{b)} -\frac{3}{5} + x^5$$

$$\text{c)} 4x^2 + (-x^2) = 4x^2 - x^2 = 3x^2 \quad (\text{Tienen igual grado})$$

$$\text{d)} -\frac{1}{3}x^2 + 4x$$

19.4 ADICIÓN DE POLINOMIOS

Para efectuar la adición de dos o más polinomios se efectúa la suma de los términos semejantes. Considera los polinomios.

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 1 \quad g(x) = 5x^2 - x + 4$$

El polinomio suma, que denotaremos por $S(x)$, está dado por:

$$S(x) = f(x) + g(x) = 3x^2 + 2x - 1 + 5x^2 - x + 4$$

Procedamos ahora a agrupar términos semejantes:

$$S(x) = (3x^2 + 5x^2) + (2x - x) + (-1 + 4)$$

Observa que los paréntesis en la expresión anterior encierran adiciones de monomios. Efectuando estas adiciones:

$$S(x) = (3 + 5)x^2 + (2 - 1)x + (-1 + 4)$$

$$S(x) = 8x^2 + x + 3$$

La forma descrita de realizar la adición de polinomios se conoce como adición horizontal. Otro método, conocido como adición vertical, ordena los polinomios de acuerdo con los términos semejantes, en forma vertical. Para el último caso, tendremos:

$$\begin{array}{r} f(x) = 3x^2 + 2x - 1 \\ g(x) = 5x^2 - x + 4 \\ \hline S(x) = (3 + 5)x^2 + (2 - 1)x + (-1 + 4) = 8x^2 + x + 3 \end{array}$$

En algunos casos, los polinomios sumandos pueden carecer de ciertos términos. Si esta situación tiene lugar, los coeficientes de los términos que no aparecen se hacen iguales a cero. El ejemplo que sigue muestra el procedimiento.

EJEMPLO 19.3

Efectúa la adición de los siguientes polinomios:

$$f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 1$$

$$g(x) = \frac{2}{5}x^4 - 3x + 6$$

Solución

$$\begin{array}{r} f(x) = 5x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1 \\ g(x) = \frac{2}{5}x^4 - 0x^3 + 0x^2 - 3x + 6 \\ \hline S(x) = (5 + \frac{2}{5})x^4 + (0 - 0)x^3 + (-2 + 0)x^2 + (0 - 3)x + (1 + 6) \end{array}$$

Luego,

$$S(x) = \left(\frac{25 + 2}{5}\right)x^4 + 0x^3 - 2x^2 - 3x + 7 \Rightarrow S(x) = \frac{27}{5}x^4 - 2x^2 - 3x + 7$$

Con práctica, la adición de dos polinomios se realiza rápidamente, mediante el método de la adición horizontal. Para el ejemplo que estamos resolviendo, podemos escribir:

$$S(x) = \left(\frac{5 + 2}{5}\right)x^4 + (-2 + 0)x^2 + (0 - 3)x + 7 \Rightarrow S(x) = \frac{27}{5}x^4 - 2x^2 - 3x + 7$$

De acuerdo con lo estudiado, es posible establecer un algoritmo para la adición de dos o más polinomios:

1. Ordena los polinomios sumandos en orden decreciente o creciente.
2. Agrupa los coeficientes de los términos semejantes usando paréntesis. Los signos de los coeficientes se conservan como en los polinomios sumandos al hacer esta agrupación.
3. Los distintos monomios resultantes de la agrupación anterior se enlazan mediante signos de suma (+).
4. Efectúa las adiciones indicadas por los paréntesis.

EJEMPLO 19.4

Utiliza el algoritmo descrito anteriormente para realizar la adición de los polinomios:

$$f(x) = -5x + \frac{1}{4} + 8x^4 \quad g(x) = -5x^4 + 2x - \frac{4}{7} + x^2$$

Los pasos a seguir, de acuerdo con el algoritmo descrito, son:

1. Ordenación de los polinomios en forma decreciente:

$$f(x) = 8x^4 - 5x + \frac{1}{4} \quad g(x) = -5x^4 + x^2 + 2x - \frac{4}{7}$$

- 2 y 3. Agrupación de los términos semejantes:

$$S(x) = (8 - 5)x^4 + x^2 + (-5 + 2)x + \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{7}\right)$$

4. Sumas entre paréntesis:

$$S(x) = 3x^4 + x^2 - 3x - \frac{9}{28}$$

Es importante observar que, siempre que se realiza la adición de polinomios, el polinomio suma es de igual o menor grado que el grado del sumando de mayor grado. Así, si efectuamos la adición de:

$$f(x) = 3x^3 + 5x - 1 \quad g(x) = x^5 + 1$$

Obtendremos:

$$S(x) = x^5 + 3x^3 + 5x$$

que es de grado 5, igual al grado del polinomio $g(x)$, el cual es el de mayor grado.

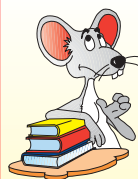
Por otro lado, si efectuamos la adición de los polinomios:

$$f(x) = -5x^6 + 3x^2 + 4 \quad g(x) = 5x^6 + 1$$

Obtendremos:

$$S(x) = 3x^2 + 5$$

ya que los coeficientes de x^6 se anulan. Resulta así un polinomio de grado menor a 6, que es el grado del polinomio de mayor grado.



EJERCICIOS



19.1 Expresa los siguientes números enteros en forma polinómica:

- a) 8.975 b) 35.124 c) 47.672

19.2 Suma los siguientes números expresándolos en forma polinómica:

- a) 3.712 y 6.187 b) 1.055 y 84.723
c) 492 y 367

19.3 Efectúa la adición de los siguientes monomios:

- a) $3x^2$ y $7x^2$ b) $\frac{3}{4}x^2$ y $-\frac{2}{3}x^3$
c) $7x^5$ y $-\frac{3}{8}x^5$ d) $-\frac{3}{4}x$ y $\frac{1}{12}x$
e) $\frac{2}{5}x^2$ y x f) $-2x^7$ y 1
g) -4 y $7x^5$ h) $-3x^9$ y $3x^9$

19.4 Efectúa la adición de los siguientes polinomios:

a) $f(x) = 7x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 1$

$g(x) = -3x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 4$

b) $f(x) = -4x^2 + 5x + 2x^3 - 6$

$g(x) = 3x + 5 - 3x^3 + x^2$

c) $f(x) = 7x + 3x^5 - 4x^2 - 3$

$g(x) = 6x^2 + 1$

d) $f(x) = -3x^2 + 8$

$g(x) = -7 + x + 3x^2$

e) $f(x) = -2x + x^2 - 6$

$g(x) = 6 - x^2 + 2x$

f) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}x + 4$

$g(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$

g) $f(x) = -\frac{3}{2}x^5 + 7x$

$g(x) = 3x^2 + \frac{1}{4}x^5 + 2$

h) $f(x) = mx^2 + nx + p$

$g(x) = -3x^2 + x - 4$

20

ADICIÓN DE POLINOMIOS:
PROPIEDADES20.1 PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA
ADICIÓN DE POLINOMIOS

Dados 3 polinomios $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ se cumple:

$$f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x) \quad (20.1)$$

lo que muestra que es lo mismo sumar $g(x)$ con $h(x)$ y el resultado sumárselo a $f(x)$, que sumar $f(x)$ con $g(x)$ y el resultado sumárselo a $h(x)$.

EJEMPLO 20.1

Usa la propiedad asociativa en la suma de los siguientes polinomios:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad g(x) = x^3 + x - 4$$

$$h(x) = x - 2$$

Solución

Asociando $g(x)$ y $h(x)$ y efectuando su suma:

$$[g(x) + h(x)] = x^3 + x - 4 + x - 2 = x^3 + 2x - 6$$

Sumando el resultado obtenido con $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) + [g(x) + h(x)] &= 3x^2 - 2x + 1 + x^3 + 2x - 6 = \\ &= x^3 + 3x^2 - 5 \end{aligned}$$

Si ahora asociamos $f(x)$ y $g(x)$ y efectuamos su suma:

$$\begin{aligned} [f(x) + g(x)] &= 3x^2 - 2x + 1 + x^3 + x - 4 = \\ &= x^3 + 3x^2 - x - 3 \end{aligned}$$

Sumando el resultado anterior con $h(x)$:

$$\begin{aligned} [f(x) + g(x)] + h(x) &= x^3 + 3x^2 - x - 3 + x - 2 = \\ &= x^3 + 3x^2 - 5 \end{aligned}$$

Resultado que es idéntico al anterior.

20.2 PROPIEDAD CONMUTATIVA DE
LA ADICIÓN DE POLINOMIOS

Esta propiedad establece que *el orden de los sumandos, en la adición de polinomios, no altera la suma*. Esto es, si tenemos los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ se puede escribir:

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$

EJEMPLO 20.2

Comprueba la propiedad conmutativa en la adición de los polinomios:

$$f(x) = -5x^4 + 3x^2 - x + 1 \quad g(x) = 6x^4 + 2x^3 - 1$$

Solución

Efectuando la adición de $f(x) + g(x)$:

$$\begin{array}{r} f(x) = -5x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 1x + 1 \\ g(x) = 6x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 0x - 1 \\ \hline S(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1x \end{array}$$

$$S(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x$$

Efectuando la adición de $g(x)$ y $f(x)$:

$$\begin{array}{r} g(x) = 6x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 0x - 1 \\ f(x) = -5x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 1x + 1 \\ \hline S(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1x \end{array}$$

$$S(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x$$

En ambos casos se obtienen iguales resultados.

20.3 EL ELEMENTO NEUTRO EN LA ADICIÓN DE POLINOMIOS

Estudiamos anteriormente que el polinomio nulo es aquel cuyos coeficientes son todos iguales a cero. Si a un polinomio cualquiera, $P(x)$, se le suma el polinomio nulo, el resultado es el mismo polinomio, $P(x)$. Es decir:

$$P(x) + 0 = 0 + P(x) = P(x) \quad (20.3)$$

Lo anterior nos permite afirmar que *el polinomio nulo es el elemento neutro de la adición de polinomios*.

20.4 POLINOMIO OPUESTO A OTRO POLINOMIO $P(x)$

Dado un polinomio $P(x)$, entonces existe otro polinomio que designamos como $-P(x)$ y tal que:

$$P(x) + [-P(x)] = 0 \quad (20.4)$$

Al polinomio $-P(x)$ se le conoce como *polinomio opuesto* a $P(x)$. De acuerdo a esto, tenemos:

$$P(x) = 7x^2 + 2x - 3 \quad -P(x) = -7x^2 - 2x + 3$$

De manera que:

$$\begin{aligned} P(x) + [-P(x)] &= 7x^2 + 2x - 3 - 7x^2 - 2x + 3 = \\ &= (7 - 7)x^2 + (2 - 2)x + (-3 + 3) = 0 \end{aligned}$$

Como puedes observar, el polinomio opuesto a $P(x)$ se forma cambiando de signo a todos los términos de $P(x)$. Así:

$$P(x) = -7x^9 + 5x^3 - 2/3$$

$$\text{Opuesto: } 7x^9 - 5x^3 + 2/3$$

$$P(x) = 5x^3 - 3/4 x + 1/5$$

$$\text{Opuesto: } -5x^3 + 3/4 x - 1/5$$

20.5 SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, para determinar $P(x) - Q(x)$ se suma a $P(x)$ el opuesto de $Q(x)$. Es decir:

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)] \quad (20.5)$$

Para realizar la sustracción $P(x) - Q(x)$, basta entonces con cambiar de signo a todos los términos de $Q(x)$ y sumar este resultado a $P(x)$.

EJEMPLO 20.3

Efectúa la sustracción de los polinomios:

$$P(x) = 4x^4 - 3x^2 + 5x - 2$$

$$Q(x) = -3x^4 + x^2 - x - 1$$

Solución

Cambiando los signos de $Q(x)$:

$$-Q(x) = 3x^4 - x^2 + x + 1$$

Luego:

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= P(x) + [-Q(x)] = \\ &= 4x^4 - 3x^2 + 5x - 2 + (3x^4 - x^2 + x + 1) = \\ &= (4 + 3)x^4 + (-3 - 1)x^2 + (5 + 1)x + (-2 + 1) \\ P(x) - Q(x) &= 7x^4 - 4x^2 + 6x - 1 \end{aligned}$$

EJEMPLO 20.4

Efectúa la sustracción de los polinomios:

$$f(x) = -3x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5} \quad g(x) = 4x^4 - 3x^2 + \frac{2}{5}x - 1$$

Solución

Se tiene:

$$-g(x) = -4x^4 + 3x^2 - \frac{2}{5}x + 1$$

Luego:

$$f(x) + [-g(x)] = -3x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5} + [-4x^4 + 3x^2 - \frac{2}{5}x + 1]$$

$$f(x) + [-g(x)] = (0 - 4)x^4 + (-3 + 0)x^3 + (0 + 3)x^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)x + \left(\frac{1}{5} + 1\right)$$

$$f(x) + [-g(x)] = -4x^4 - 3x^3 + 3x^2 + \frac{1}{10}x + \frac{6}{5}$$



20.1 Usa la propiedad asociativa en la adición de los siguientes polinomios:

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + \frac{1}{3}x$ $g(x) = -3x^2 + 1$

$$h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x$$

b) $P(x) = 5x^4 + 3x^2 - 4$ $Q(x) = -3x + 1$

$$R(x) = -5x^4 + x^3 - 2$$

20.2 Comprueba la propiedad conmutativa en la adición de los siguientes polinomios:

a) $m(x) = -5x^5 + \frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{7}$

$$n(x) = 4x^4 - \frac{1}{5}x^3 + x^2 + 3$$

b) $f(x) = 1 + 3x^2 - 5x^3 + 2x$

$$g(x) = -3x + \frac{2}{3} + x^3$$

20.3 Determina los polinomios opuestos a:

a) $v(x) = -5x^7 + 8x^2 - 3x + 1$ b) $w(x) = 4x - 3$

c) $u(x) = 4$ d) $g(x) = -\frac{1}{3}x^7 + 3x^6 - \frac{1}{5}x^2$

20.4 Efectúa la sustracción de los polinomios dados:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ $g(x) = 2x^2 - 6x$

b) $P(x) = 5x^3 - 9x^2 + 3$ $Q(x) = 9x^2 + 3$

c) $P(x) = -x^4 + 3x^2 + 5$ $G(x) = x^2 + 5$

d) $V(x) = 1$ $W(x) = -5x^3 + 8x$

e) $P(x) = 2x^6 + 3x^2 - x$

$$Q(x) = x^6 - 3x^5 - x^2 + 4$$

f) $Q(x) = -4x^4 + 2x^3 - 7 + x^2 + x$

$$R(x) = 4x - 5 + x^2 + 1$$

En todos los casos anteriores ordena el resultado en orden decreciente.

20.5 Dados los polinomios:

$$P(x) = 2x^3 + \frac{5}{8}x^2 - 3x + \frac{2}{9}$$

$$Q(x) = -\frac{5}{6} + 3x^2 - \frac{1}{4}$$

$$R(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$$

determina:

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

b) $P(x) - Q(x) + R(x)$

c) $P(x) - Q(x) - R(x)$

d) $-P(x) + Q(x) + R(x)$

e) $-P(x) - Q(x) + R(x)$

20.6 Determina el resultado de la sustracción de los polinomios:

a) $3x^p + 2x^q - 4$ $7x^p - 2x^q + 5$

b) $ax^{n+1} + bx^n + c$ $mx^{n+1} + px^n + q$

21

MULTIPLICACIÓN
DE POLINOMIOS**21.1 MULTIPLICACIÓN DE DOS
NÚMEROS EXPRESADOS EN
FORMA POLINÓMICA**

Considera la multiplicación de los números 3 y 245:

$$3 \cdot 245 = 735$$

Si expresamos los factores 3 y 245 en forma polinómica, tendremos:

$$3 = 3 \cdot 10^0 = 3 \quad 245 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

El resultado entonces puede escribirse como:

$$3 \cdot 245 = 3 \cdot (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0)$$

Utilizando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 245 &= 6 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10^1 + 15 \cdot 10^0 = \\ &= 600 + 120 + 15 = 735 \end{aligned}$$

resultado que indica que los números 3 y 245 pueden multiplicarse expresándolos en forma polinómica.

**21.2 MULTIPLICACIÓN DE UNA
CONSTANTE POR UN POLI-
NOMIO**

Para multiplicar una constante por un polinomio se usa el mismo procedimiento discutido en la sección anterior. La aplicación de la propiedad distributiva conduce al resultado requerido.

Supongamos se desea efectuar la multiplicación de la constante 2 por el polinomio $5x^3 - 2x^2 + 4$. Si llamamos $P(x)$ al producto, se tiene:

$$P(x) = 2 \cdot (5x^3 - 2x^2 + 4)$$

Utilizando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2 \cdot (5x^3 - 2x^2 + 4) = \\ &= 2 \cdot 5x^3 + 2 \cdot (-2)x^2 + 2 \cdot 4 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$P(x) = 10x^3 - 4x^2 + 8$$

El resultado anterior sugiere el siguiente procedimiento:

Para efectuar la multiplicación de una constante por un polinomio, se multiplica la constante por cada uno de los coeficientes del polinomio utilizando la propiedad distributiva.

EJEMPLO 21.1

Efectúa las multiplicaciones siguientes:

- a) $4 \cdot 283$ b) $3 \cdot \left(-7x^4 + 4x^2 - \frac{1}{3}\right)$
c) $(-2) \cdot (8x^2 - 4x + 1)$

(Expresa 283 en forma polinómica).

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } 4 \cdot 283 &= 4 \cdot (2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) = \\ &= 8 \cdot 10^2 + 32 \cdot 10^1 + 12 \cdot 10^0 = \\ &= 800 + 320 + 12 = 1.132 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3 \cdot \left(-7x^4 + 4x^2 - \frac{1}{3}\right) &= 3 \cdot (-7)x^4 + 3 \cdot 4x^2 + \\ &+ 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -21x^4 + 12x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (-2) \cdot (8x^2 - 4x + 1) &= (-2) \cdot (8)x^2 + (-2) \cdot (-4)x + \\ &+ (-2) \cdot (1) = -16x^2 + 8x - 2 \end{aligned}$$

21.3 MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS

Para multiplicar un monomio por otro, se procede de acuerdo al siguiente algoritmo:

- 1.- Se multiplican los coeficientes de los monomios.
- 2.- Se efectúa la multiplicación de la variable x .

Es oportuno recordar aquí que cuando se multiplican potencias de igual base, como los casos que trataremos, se conserva la misma base y el exponente es la suma de los exponentes de los factores. Así, por ejemplo:

$$x^7 \cdot x^3 = x^{7+3} = x^{10} \quad x^5 \cdot x = x^{5+1} = x^6$$

En general, si se tienen los monomios ax^n y bx^m , su producto, $P(x)$, será:

$$P(x) = (ax^n) \cdot (bx^m) = (a \cdot b)x^{n+m}$$

EJEMPLO 21.2

Multiplica los monomios:

$$\text{a) } 3x^3 \text{ y } -5x \quad \text{b) } \frac{1}{3}x^5 \text{ y } -5x$$

$$\text{c) } -\frac{1}{8}x^{10} \text{ y } -\frac{4}{3}x^2$$

Solución

$$\text{a) } (3x^3) \cdot (-5x) = -(3 \cdot 5)x^3 \cdot x^1 = -15x^4$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{3}x^5\right) \cdot (-5x) = \left[\frac{1}{3} \cdot (-5)\right]x^5 \cdot x = -\frac{5}{3}x^6$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(-\frac{1}{8}x^{10}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}x^2\right) &= \left[\left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)\right] \cdot x^{10} \cdot x^2 \\ &= \frac{4}{24}x^{12} = \frac{1}{6}x^{12} \end{aligned}$$

21.4 MULTIPLICACIÓN DE UN MONOMIO POR UN POLINOMIO

La multiplicación de un monomio por un polinomio se realiza de la misma forma descrita en el caso de la multiplicación de una constante por un polinomio. Es decir, se hace uso de la propiedad distributiva para obtener el resultado deseado. En general, dado un monomio ax^n y un polinomio $b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0$, su producto, $P(x)$, con n y $m \in N$, será:

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^n \cdot (b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0) = \\ &= ab_mx^n x^m + ab_{m-1}x^n x^{m-1} + \dots + ab_1x^n x + ab_0x^n \end{aligned}$$

$$P(x) = ab_mx^{n+m} + ab_{m-1}x^{n+m-1} + \dots + ab_1x^{n+1} + ab_0x^n \quad (21.2)$$

relación que indica que al multiplicar un monomio por un polinomio resulta otro polinomio cuyo grado se obtiene mediante la adición de los grados del monomio y el polinomio.

EJEMPLO 21.3

Determina el producto de:

$$P(x) = 2x^2 \quad Q(x) = -3x^4 + 2x^3 - 3x - 5$$

Solución

Se tiene:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x^2) \cdot (-3x^4 + 2x^3 - 3x - 5) = \\ &= (2x^2) \cdot (-3x^4) + (2x^2) \cdot (2x^3) + \\ &+ (2x^2) \cdot (-3x) + (2x^2) \cdot (-5) \end{aligned}$$

$$P(x) \cdot Q(x) = -6x^6 + 4x^5 - 6x^3 - 10x^2$$

Observa que el grado del polinomio resultante, 6, se obtiene mediante la adición de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$.

EJEMPLO 21.4

Dados los polinomios:

$$P(x) = -3 \quad R(x) = 4x \quad Q(x) = 5x^2 - 6x + 2$$

determina $P(x) \cdot Q(x) + R(x) \cdot Q(x)$

Solución

La primera multiplicación nos da:

$$P(x) \cdot Q(x) = (-3) \cdot (5x^2 - 6x + 2) = -15x^2 + 18x - 6$$

Para la segunda multiplicación se tiene:

$$\begin{aligned} R(x) \cdot Q(x) &= (4x) \cdot (5x^2 - 6x + 2) = \\ &= 20x^3 - 24x^2 + 8x \end{aligned}$$

Efectuando la adición de los productos obtenidos:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) + R(x) \cdot Q(x) &= \\ &= 20x^3 + (-15 - 24)x^2 + (18 + 8)x - 6 = \\ &= 20x^3 - 39x^2 + 26x - 6 \end{aligned}$$

21.5 MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

La multiplicación de polinomios se realiza mediante la propiedad distributiva. Considera los polinomios:

$$P(x) = 3x + 2 \quad (\text{grado } 1)$$

$$Q(x) = 2x^2 + 5x + 2 \quad (\text{grado } 2)$$

La multiplicación se efectúa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (3x + 2) \cdot (2x^2 + 5x + 2) = \\ &= (3x) \cdot (2x^2) + (3x) \cdot (5x) + (3x) \cdot 2 + 2 \cdot (2x^2) + \\ &\quad + 2 \cdot (5x) + 2 \cdot 2 \\ &= 6x^3 + 15x^2 + 6x + 4x^2 + 10x + 4 \\ &\quad \text{Términos semejantes} \\ &= 6x^3 + 15x^2 + 6x + 4x^2 + 10x + 4 \\ &\quad \text{Términos semejantes} \end{aligned}$$

Observa, en la expresión resultante, la aparición de términos semejantes. Sumando dichos términos:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= 6x^3 + 19x^2 + 16x + 4 \\ &(\text{Polinomio de grado } 3) \end{aligned}$$

Nuevamente, se cumple que el grado del polinomio resultante de una multiplicación es la suma de los grados de los polinomios que intervienen como factores. De acuerdo al procedimiento anterior, podemos establecer un algoritmo para multiplicar dos polinomios:

1. Ordena los polinomios en forma decreciente.
2. Utiliza la propiedad distributiva para efectuar la multiplicación de los polinomios.
3. Suma los términos semejantes resultantes de la operación anterior.

EJEMPLO 21.5

Efectúa la multiplicación de los siguientes polinomios:

$$f(x) = x - \frac{1}{3} \quad g(x) = 4x^2 - 3x + \frac{3}{7}$$

Solución

Tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(4x^2 - 3x + \frac{3}{7}\right) \\ &= x \cdot (4x^2) + x \cdot (-3x) + x \cdot \left(\frac{3}{7}\right) + \\ &\quad + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (4x^2) + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-3x) + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{7}\right) = \end{aligned}$$

$$= 4x^3 - 3x^2 + \frac{3}{7}x - \frac{4}{3}x^2 + x - \frac{1}{7}$$

$\xrightarrow{\text{Términos semejantes}}$
 $\xleftarrow{\text{Términos semejantes}}$

Reduciendo términos semejantes:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= 4x^3 + \left(-3 - \frac{4}{3}\right)x^2 + \left(\frac{3}{7} + 1\right)x - \frac{1}{7} = \\ &= 4x^3 - \frac{13}{3}x^2 + \frac{10}{7}x - \frac{1}{7} \end{aligned}$$

EJEMPLO 21.6

Multiplica los polinomios:

$$P(x) = 3x^5 + 4x^2 - 5x + 2$$

$$Q(x) = -x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

Solución

Se tiene:

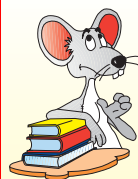
$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= \\ &= (3x^5 + 4x^2 - 5x + 2) \cdot (-x^3 - 3x^2 + 2x + 1) = \\ &= (3x^5) \cdot (-x^3) + (3x^5) \cdot (-3x^2) + (3x^5) \cdot (2x) + \\ &\quad + (3x^5) \cdot (1) + (4x^2) \cdot (-x^3) + (4x^2) \cdot (-3x^2) + \\ &\quad + (4x^2) \cdot (2x) + (4x^2) \cdot (1) + (-5x) \cdot (-x^3) + \\ &\quad + (-5x) \cdot (-3x^2) + (-5x) \cdot (2x) + (-5x) \cdot (1) + \\ &\quad + (2) \cdot (-x^3) + (2) \cdot (-3x^2) + (2) \cdot (2x) + (2) \cdot (1) = \\ &= -3x^8 - 9x^7 + 6x^6 + 3x^5 - 4x^5 - 12x^4 + 8x^3 + 4x^2 + \\ &\quad + 5x^4 + 15x^3 - 10x^2 - 5x - 2x^3 - 6x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= -3x^8 - 9x^7 + 6x^6 + (3 - 4)x^5 + \\ &\quad + (-12 + 5)x^4 + (8 + 15 - 2)x^3 + \\ &\quad + (4 - 10 - 6)x^2 + (-5 + 4)x + 2 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= -3x^8 - 9x^7 + 6x^6 - x^5 - 7x^4 + \\ &\quad + 21x^3 - 12x^2 - x + 2 \end{aligned}$$



EJERCICIOS



21.1 Efectúa las siguientes multiplicaciones, expresando los números en forma polinómica:

- a) $5 \cdot 378$ b) $12 \cdot 837$ c) $150 \cdot 42$

21.2 Efectúa las siguientes multiplicaciones:

- a) $5 \cdot \left(-2x^4 + 4x^2 - \frac{1}{5}x + 1\right)$
 b) $(-2) \cdot \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{2}x + 4\right)$
 c) $\frac{2}{3} \cdot (4x^3 - 5x + 3)$
 d) $\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}x^5 + 8x^4 - 2x^3 + 4\right)$

21.3 Multiplica los monomios:

- a) $2x^2$ y $3x^7$ b) $-2x$ y $3x^7$ c) $-5x$ y $4x^5$
 d) $\frac{1}{4}x^7$ y $8x$ e) $-\frac{1}{2}x^3$ y $\frac{4}{3}x^2$ f) $-\frac{2}{5}x^3$ y $\frac{10}{4}$

21.4 Efectúa los siguientes productos:

- a) $5x \cdot (2x^3 - 3x^2 + x - 1)$
 b) $(-2x^2) \cdot (3x^2 + x + 2)$
 c) $\left(-\frac{3}{5}x^2\right) \cdot \left(\frac{10}{3}x^2 + \frac{15}{2}x - \frac{10}{6}\right)$
 d) $\left(2x^4 - 3x^2 + \frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

21.5 Multiplica:

a) $(x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 1)$

b) $(2x - 1) \cdot (5x^3 + 4x - 2)$

c) $\left(x - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^3 + 3x + 8\right)$

d) $\left(5x^3 + 2x^2 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)$

e) $(3x^2 + 2x - 4) \cdot (2x^3 + 5x - 2)$

f) $(-3x^5 + 8x - 3) \cdot (x^2 + x + 1)$

g) $\left(x^2 + \frac{2}{3}x - 6\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 3\right)$

h) $\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{5}\right)$

i) $(3x^3 - 3x^2 + 2x - 3) \cdot (x^4 + 3x^2 - 2x + 7)$

j) $(x^2 - 4x + 4) \cdot (x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x + 1)$

21.6 El producto de los binomios $(x^3 + a)$ y $(x + b)$ es:

$$(x^3 + a) \cdot (x + b) = x^4 + x^3 + 2x + 2$$

Determina los valores de a y b .

21.7 El producto de los binomios $(2x - a)$ y $(bx + 5)$ es:

$$(2x - a) \cdot (bx + 5) = 12x^2 - 8x - 15$$

Determina los valores de a y b .

21.8 El producto del trinomio $(2x^2 + mx - 1)$ por el binomio $(x + n)$ es:

$$(2x^2 + mx - 1) \cdot (x + n) = 2x^3 + 7x^2 + 5x - 2$$

Determina los valores de m y n .

22

MULTIPLICACIÓN DE
POLINOMIOS: PROPIEDADES**22.1 PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS**

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios se cumple:

$$P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x) \quad (22.1)$$

La expresión (22.1) es la propiedad conmutativa de la multiplicación de polinomios que se puede enunciar de la manera siguiente:

En la multiplicación de polinomios, el orden en que se efectúa la multiplicación no altera el resultado.

EJEMPLO 22.1

Comprueba la propiedad conmutativa si:

$$P(x) = 2x - 3 \quad Q(x) = 3x^4 + 5x + 2$$

Solución

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x - 3) \cdot (3x^4 + 5x + 2) \\ &= 6x^5 + 10x^2 + 4x - 9x^4 - 15x - 6 \end{aligned}$$

Reduciendo términos semejantes y ordenando:

$$P(x) \cdot Q(x) = 6x^5 - 9x^4 + 10x^2 - 11x - 6$$

Efectuando la multiplicación $Q(x) \cdot P(x)$:

$$\begin{aligned} Q(x) \cdot P(x) &= (3x^4 + 5x + 2) \cdot (2x - 3) \\ &= 6x^5 - 9x^4 + 10x^2 - 15x + 4x - 6 \end{aligned}$$

$$Q(x) \cdot P(x) = 6x^5 - 9x^4 + 10x^2 - 11x - 6$$

que es el mismo resultado anterior.

22.2 PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Dados los polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, se cumple:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x) &= [P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = \\ &= P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)] \quad (22.2) \end{aligned}$$

La expresión anterior es la propiedad asociativa de la multiplicación de polinomios que puede enunciarse de la manera siguiente:

En la multiplicación de tres polinomios, $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, se obtiene el mismo resultado si se multiplican primero $P(x)$ y $Q(x)$ y a lo que resulta se le multiplica por $R(x)$, que si se multiplica $P(x)$ por el resultado que se obtiene al hacer la multiplicación de $Q(x)$ por $R(x)$.

22.3 EL ELEMENTO NEUTRO EN LA MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Al polinomio $P(x) = 1$ se le denomina **polinomio unidad**. Es decir, el polinomio unidad es aquel cuyos coeficientes son iguales a cero, con excepción del término independiente que es igual a 1.

Si a un polinomio cualquiera, $Q(x)$, se le multiplica por el polinomio unidad, el resultado es el mismo polinomio $Q(x)$. Esto es:

$$Q(x) \cdot 1 = Q(x) \quad (22.3)$$

Lo anterior nos permite afirmar que:

El polinomio unidad es el elemento neutro en la multiplicación de polinomios.

22.4 LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA EN LA MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Consideremos los polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$. La propiedad distributiva aplicada a estos polinomios establece:

$$P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x) \quad (22.4)$$

que nos dice que para multiplicar un polinomio, $P(x)$, por una suma de polinomios, $Q(x) + R(x)$, se multiplica $P(x)$ por $Q(x)$ y por $R(x)$ y, luego, se suman los productos parciales resultantes. La propiedad distributiva puede también ser aplicada a más de tres polinomios. Es decir:

$$P(x) \cdot [Q(x) + R(x) + S(x) + W(x) + \dots] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x) + P(x) \cdot S(x) + P(x) \cdot W(x) + \dots$$



22.1 Comprueba la propiedad conmutativa en la multiplicación de polinomios si:

a) $P(x) = x - 1$ $Q(x) = x^3 + 5x^2 - x + 3$

b) $M(x) = \frac{2}{8}x^2 + \frac{1}{2}$ $N(x) = \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x - 4$

c) $R(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ $S(x) = \frac{3}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{3}{2}$

22.2 Comprueba la propiedad asociativa en la multiplicación de los polinomios:

a) $P(x) = 2x - 7$ $Q(x) = 4x^2 - 3x + 1$

$$R(x) = 3x^2 + 2$$

b) $P(x) = -2x$ $Q(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{2}x - 6$

$$R(x) = \frac{2}{5}x^4 + \frac{2}{7}x - 3$$

c) $M(x) = \frac{1}{4}$ $N(x) = \frac{8}{5}x^2 - \frac{12}{7}x + 2$

$$R(x) = -\frac{3}{5}x + 4$$

22.3 Aplica la propiedad distributiva en las siguientes multiplicaciones de polinomios:

a) $(2x + 5) \cdot [(3x - 1) + (x^2 - 3)]$

b) $(3x - 7) \cdot [(x^2 + 2x - 1) + (-x + 1)]$

c) $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left[(5x + 4) + \left(\frac{3}{2} + 2x + 5\right)\right]$

d) $(1 - 3x^2) \cdot \left[\frac{2}{5}x + 3 \cdot \left(x^4 + x^2 - \frac{1}{2}x\right)\right]$

e) $(2x^3 + 3x^2 - 5) \cdot [(2x - 5) + (3x - 1)]$

f) $1 \cdot [(x^2 + 3) + (3 - x^3)]$

22.4 Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $(a^x + 2) \cdot (a^x - 1)$ ($x \geq 0$)

b) $a^x \cdot (a^x + 2)$ ($x \geq 0$)

c) $x^n \cdot (x^{n-1} + x^2)$ ($n \geq 1$)

d) $(x^{n-1} + x) \cdot (x + 3)$ ($n \geq 1$)

e) $(x^{n-1} + x^n + 1) \cdot (x^n + x^{n-1} + 2)$ ($n \geq 1$)

f) $(x^0 + x^n) \cdot (1 + x^{1+n})$ ($n \geq 0$)

22.5 OPERACIONES COMBINADAS DE ADICIÓN, SUSTRACCIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Cuando se presentan operaciones combinadas de adición, sustracción y multiplicación de polinomios, se efectúan primero las operaciones de multiplicación y luego las de adición y sustracción de los términos semejantes. Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento a seguir.

EJEMPLO 22.2

Efectúa las operaciones indicadas y simplifica el resultado:

$$S(x) = 2x(x^2 + 5x - 1)(3x + 2) - (2x + 3)(3x^3 + 2x - 3) + 6$$

Solución

Efectuando las multiplicaciones indicadas:

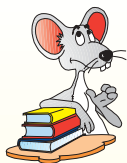
$$\begin{aligned} S(x) &= 2x(x^2 + 5x - 1)(3x + 2) - (2x + 3)(3x^3 + 2x - 3) + 6 = 2x(3x^3 + 2x^2 + 15x^2 + 10x - 3x - 2) - \\ &\quad + (6x^4 + 4x^2 - 6x + 9x^3 + 6x - 9) + 6 \end{aligned}$$

A partir de aquí podemos proceder de dos maneras distintas. Una de ellas es efectuar la adición de los términos semejantes encerrados entre paréntesis y luego multiplicar por el factor externo. Otra forma de proceder consiste en multiplicar por los factores externos a los paréntesis y luego efectuar la adición de los términos semejantes. Si usamos la primera alternativa tendremos:

$$\begin{aligned} S(x) &= 2x(3x^3 + 17x^2 + 7x - 2) - (6x^4 + 9x^3 + 4x^2 - 9) + 6 = 6x^4 + 34x^3 + 14x^2 - 4x - 6x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 9 + 6 = \\ &= (6 - 6)x^4 + (34 - 9)x^3 + (14 - 4)x^2 - 4x + 15 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$S(x) = 25x^3 + 10x^2 - 4x + 15$$



EJERCICIOS



22.5 Efectúa las operaciones indicadas y simplifica el resultado:

a) $P(x) = (3x - 2)(2x^2 + x - 1) - 5x(x^3 + x - 4)$

b) $Q(x) = \left(5x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{3}{4}\right)(x + 3) + (x^2 - 1)\left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{5}\right)$

c) $R(x) = -x(3 + x) + 5x(-3 + x) - (2x + 4)(7 + 3x) - (2 - x)(2 + x)$

d) $W(x) = (x + 7)(x - 7) - 2x(x + 2)(x - 2) + 4(x^2 + 4)$

e) $R(x) = (-2x^2 + 1)(3 - 5x) - \{-4 + 5x^3(3 - 2x) + 7[-2 + (x - 3)(-5x)]\}$

f) $T(x) = (x^n - 3)(2x + 2) + x^{n-1}[-3x + x^2 - (4 + 8x)]$

23

PRODUCTOS NOTABLES

23.1 PRODUCTOS NOTABLES

Se denominan **productos notables** a algunos productos cuyos resultados se pueden escribir directamente, una vez que se conocen las reglas para efectuarlos. Los productos notables que estudiaremos en este objetivo son:

- a) El producto del binomio $(x + a)$ por sí mismo o *cuadrado de la suma*:

$$(x + a)(x + a) = (x + a)^2 \quad (23.1)$$

- b) El producto del binomio $(x - a)$ por sí mismo o *cuadrado de la diferencia*:

$$(x - a)(x - a) = (x - a)^2 \quad (23.2)$$

- c) El producto de los binomios $(x + a)$ y $(x - a)$ o *diferencia de cuadrados*:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2 \quad (23.3)$$

- d) El producto de los binomios $(x + a)$ y $(x + b)$:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad (23.4)$$

23.2 EL CUADRADO DE LA SUMA

Consideremos el binomio $(x + a)$, donde a es una cantidad constante perteneciente al conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales. El producto de $(x + a)$ por sí mismo está dado por

$$(x + a)(x + a) = (x + a)^2 \quad (23.5)$$

Desarrollando el primer miembro de la igualdad anterior se tiene:

$$\begin{aligned} (x + a)(x + a) &= x^2 + ax + ax + a^2 = \\ &= x^2 + 2ax + a^2 \end{aligned} \quad (23.6)$$

De (23.5) y (23.6), se puede concluir que:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \quad (23.7)$$

expresión que establece que $(x + a)^2$ se puede calcular de la manera siguiente:

1. Se eleva el primer término, x , al cuadrado:

$$x^2$$

2. Se multiplica por 2 el producto de los dos términos:

$$2ax$$

3. Se eleva el segundo término, a , al cuadrado:

$$a^2$$

- 4.- Se suman los resultados anteriores:

$$x^2 + 2ax + a^2$$

EJEMPLO 23.1

Desarrolla las siguientes expresiones:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (x + 3)^2 & \text{b)} \left(x + \frac{2}{5}\right)^2 \\ \text{c)} (2x + 5)^2 & \text{d)} \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)^2 \end{array}$$

Solución

- a) $(x + 3)^2$:

Cuadrado del primer término: x^2

Doble del producto de x y 3 : $2 \cdot 3 \cdot x = 6x$

Cuadrado del segundo término: $3^2 = 9$

Suma de los resultados anteriores: $x^2 + 6x + 9$

Luego:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

b) $\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 :$

Cuadrado del primer término: x^2

Doble del producto de x y $\frac{2}{5}$: $2 \cdot \frac{2}{5} \cdot x = \frac{4}{5}x$

Cuadrado del segundo término: $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

Luego:

$$\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}$$

c) $(2x + 5)^2 :$

Cuadrado del primer término: $(2x)^2 = 4x^2$

Doble del producto de $2x$ y 5 : $2 \cdot 5 \cdot 2x = 20x$

Cuadrado del segundo término: $5^2 = 25$

Luego:

$$(2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$$

d) $\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)^2 :$

Cuadrado del primer término: $\left(\frac{3}{4}x\right)^2 = \frac{9}{16}x^2$

Doble del producto de $\frac{3}{4}x$ y $\frac{1}{2}$: $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}x$

Cuadrado del segundo término: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Luego:

$$\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

23.3 TRINOMIO CUADRADO PERFECTO. FACTORIZACIÓN.

Cuando se desarrolla el cuadrado de una suma, se obtiene un trinomio. Al mismo se le conoce con el nombre de *trinomio cuadrado perfecto*. Así en el desarrollo:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \quad (23.8)$$

el trinomio resultante, $x^2 + 2ax + a^2$, es un trinomio cuadrado perfecto. De la misma forma, en el desarrollo de:

$$(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49 \quad (23.9)$$

el trinomio $x^2 + 14x + 49$ es un trinomio cuadrado perfecto.

La factorización es el mecanismo mediante el cual se determinan los factores que originan un polinomio.

La factorización es, entonces, un proceso inverso al del desarrollo de un polinomio como producto. En los casos anteriores, factorizar los trinomios $x^2 + 2ax + a^2$ y $x^2 + 14x + 49$ es encontrar los factores que al ser multiplicados originan dichos trinomios. Así:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)(x + a) = (x + a)^2$$

$$x^2 + 14x + 49 = (x + 7)(x + 7) = (x + 7)^2$$

Para reconocer un trinomio cuadrado perfecto se procede de la siguiente manera:

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primer término.

Paso 2.- Se saca la raíz cuadrada del tercer término.

Paso 3.- Se comprueba si el segundo término es el doble del producto de las raíces cuadradas anteriores. Si esto es así, el trinomio es cuadrado perfecto.

EJEMPLO 23.2

Verifica si los trinomios dados son cuadrados perfectos:

a) $R(x) = x^2 + 10x + 25$ b) $U(x) = x^2 + \frac{10}{7}x + \frac{25}{49}$

c) $M(x) = x^2 + 3x + 1$ d) $P(x) = 4x^2 + 12x + 9$

Solución

a) $R(x) = x^2 + 10x + 25$:

Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{x^2} = x$

Raíz cuadrada del tercer término: $\sqrt{25} = 5$

Doble del producto de las raíces: $2 \cdot 5 \cdot x = 10x$

Como el doble del producto de las raíces genera el segundo término, el trinomio es cuadrado perfecto. Es decir, se puede escribir:

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

b) $U(x) = x^2 + \frac{10}{7}x + \frac{25}{49}$

Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{x^2} = x$

Raíz cuadrada del tercer término: $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$

Doble del producto de las raíces: $2 \cdot \frac{5}{7} \cdot x = \frac{10}{7}x$

Luego, el trinomio es cuadrado perfecto. Es decir:

$$x^2 + \frac{10}{7}x + \frac{25}{49} = \left(x + \frac{5}{7}\right)^2$$

c) $M(x) = x^2 + 3x + 1$:

Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{x^2} = x$

Raíz cuadrada del tercer término: $\sqrt{1} = 1$

Doble del producto de las raíces: $2 \cdot 1 \cdot x = 2x$

Como al efectuar el último paso no se obtiene el segundo término, $3x$, el trinomio no es un cuadrado perfecto.

d) $P(x) = 4x^2 + 12x + 9$:

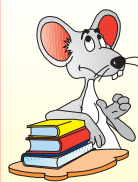
Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{4x^2} = 2x$

Raíz cuadrada del tercer término: $\sqrt{9} = 3$

Doble del producto de las raíces: $2 \cdot 3 \cdot 2x = 12x$

Como al efectuar el último paso se obtiene el segundo término, el trinomio es cuadrado perfecto. Es decir:

$$(4x^2 + 12x + 9) = (2x + 3)^2$$

**EJERCICIOS**

23.1 Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(x + 7)^2$ b) $(x + 10)^2$ c) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2$

d) $(3x + 4)^2$ e) $(6x + 9)^2$ f) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\right)^2$

23.2 Verifica si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos y realiza la factorización correspondiente:

a) $x^2 + 12x + 36$ b) $x^2 + 22x + 121$

c) $x^2 + 10x + 100$ d) $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$

e) $9x^2 + 30x + 25$ f) $25x^2 + x + \frac{1}{100}$

23.4 EL CUADRADO DE LA DIFERENCIA

Consideremos el binomio $(x-a)$, donde $a \in \mathbb{Q}$. El producto del binomio $(x-a)$ por sí mismo está dado por:

$$(x-a)(x-a) = (x-a)^2 \quad (23.10)$$

Desarrollando el primer término de la igualdad anterior:

$$(x-a)(x-a) = x^2 - ax - ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2 \quad (23.11)$$

De (23.10) y (23.11), se puede concluir que:

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \quad (23.12)$$

La expresión $x^2 - 2ax + a^2$ es también un trinomio cuadrado perfecto. Observa que la única diferencia con el desarrollo de $(x+a)^2$ es el signo, negativo en este caso, del segundo término del trinomio. La expresión (23.12) establece que para calcular el cuadrado de una diferencia, $(x-a)$, se debe proceder de la manera siguiente:

1. Se eleva el primer término, x , al cuadrado:

$$x^2$$

2. Se multiplica por 2 y se cambia de signo al producto de los dos términos:

$$-2ax$$

3. Se eleva el segundo término, a , al cuadrado:

$$a^2$$

4. Se suman los resultados anteriores:

$$x^2 - 2ax + a^2$$

Para reconocer si un trinomio dado corresponde al desarrollo del cuadrado de una diferencia; es decir, si es un trinomio cuadrado perfecto, se procede de la misma forma establecida en la sección 23.3, tomando en cuenta que en estos casos el segundo término del trinomio debe ir precedido de un signo negativo.

EJEMPLO 23.3

Desarrolla las siguientes expresiones:

$$\text{a) } (x-6)^2 \quad \text{b) } \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Solución

$$\text{a) } (x-6)^2:$$

El cuadrado del primer término: x^2

El doble del producto de x y 6 cambiado de signo:

$$-2 \cdot 6 \cdot x = -12x$$

El cuadrado del segundo término: $6^2 = 36$

La suma de los resultados anteriores:

$$x^2 - 12x + 36$$

Luego: $(x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$

$$\text{b) } \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right)^2:$$

El cuadrado del primer término: $\left(\frac{2}{5}x\right)^2 = \frac{4}{25}x^2$

El doble del producto de $\frac{2}{5}x$ y $\frac{1}{2}$ cambiado de signo:

$$-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}x = -\frac{2}{5}x$$

El cuadrado del segundo término: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Luego: $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{25}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}$

EJEMPLO 23.4

Verifica si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos:

$$\text{a) } x^2 - 16x + 64 \quad \text{b) } x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25}$$

$$\text{c) } x^2 - 16x + 16$$

Solución

a) $x^2 - 16x + 64$:

Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{x^2} = x$ Raíz cuadrada del tercer término: $\sqrt{64} = 8$

Doble del producto de las raíces cambiado de signo:

$$-2 \cdot 8 \cdot x = -16x$$

Se trata entonces de un trinomio cuadrado perfecto, ya que el doble del producto de las raíces genera el segundo término. Se puede, entonces, escribir:

$$x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$$

b) $x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25}$:

Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{x^2} = x$ Raíz cuadrada del tercer término: $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

Doble del producto de las raíces cambiado de signo:

$$-2 \cdot \frac{3}{5} \cdot x = -\frac{6}{5}x$$

Por tanto, se puede escribir:

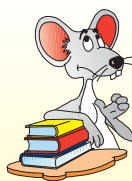
$$x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} = \left(x - \frac{3}{5}\right)^2$$

c) $x^2 - 6x + 16$:

Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{x^2} = x$ Raíz cuadrada del tercer término: $\sqrt{16} = 4$

Doble del producto de las raíces cambiado de signo:

$$-2 \cdot 4 \cdot x = -8x$$

Como el doble del producto de las raíces no es igual a $6x$, el trinomio no es cuadrado perfecto.**EJERCICIOS****23.3** Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(x - 5)^2$

b) $(x - 14)^2$

c) $\left(x - \frac{1}{8}\right)^2$

d) $\left(x - \frac{10}{11}\right)^2$

e) $(5x - 4)^2$

f) $(10x - 1)^2$

g) $\left(\frac{3}{4}x - \frac{5}{8}\right)^2$

h) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{10}\right)^2$

23.4 Verifica si las siguientes expresiones son trinomios cuadrados perfectos y realiza la factorización correspondiente:

a) $x^2 - 24x + 144$

b) $x^2 - 18x + 81$

c) $x^2 - 18x + 9$

d) $x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{25}{49}$

e) $4x^2 - x + \frac{1}{16}$

f) $x^2 - x + 1$

23.5 VISUALIZACIÓN GRÁFICA DEL CUADRADO DE LA SUMAConsideremos el binomio $(x + a)$ elevado al cuadrado, $(x + a)^2$. Este puede expresarse como:

$$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x^2 + 2ax + a^2 \quad (23.13)$$

Gráficamente el producto anterior puede representarse como el área de un cuadrado de lado $(x + a)$, tal como lo indica la fig. 23.1. Si pones atención a dicho cuadrado, te darás cuenta que a su vez está formado por dos cuadrados de áreas x^2 y a^2 y por dos rectángulos de área ax . En otras palabras, el área total del cuadrado de la fig. 23.1 reproduce a la expresión (23.13). Es decir:

$$\text{Área total: } x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

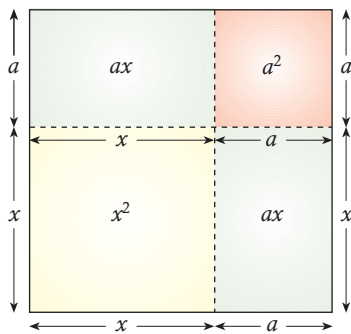


Fig. 23.1 Representación gráfica del cuadrado de la suma.

23.6 VISUALIZACIÓN GRÁFICA DEL CUADRADO DE LA DIFERENCIA

El binomio $(x - a)$ elevado al cuadrado, $(x - a)^2$, puede expresarse como:

$$(x - a)^2 = (x - a)(x - a) = x^2 - 2ax + a^2 \quad (23.14)$$

Si llamamos x al lado de un cuadrado, el cuadrado del lado $x - a$ puede representarse gráficamente como se muestra en la fig. 23.2. De dicha figura puede notarse que el área del cuadrado rayado está dada por:

Área del cuadrado rayado = área del cuadrado grande – (área del cuadrado pequeño) – (área de los dos rectángulos)

Utilizando las dimensiones de la figura, podemos escribir:

$$\text{Área del cuadrado rayado: } (x - a) \cdot (x - a) = (x - a)^2$$

$$\text{Área del cuadrado grande: } x \cdot x = x^2$$

$$\text{Área del cuadrado pequeño: } a^2$$

$$\text{Área de los rectángulos:}$$

$$a(x - a) + a(x - a) = ax - a^2 + ax - a^2 = 2ax - 2a^2$$

Luego:

$$(x - a)^2 = x^2 - (2ax - 2a^2) - a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

que es el desarrollo que ya conoces para $(x - a)^2$.

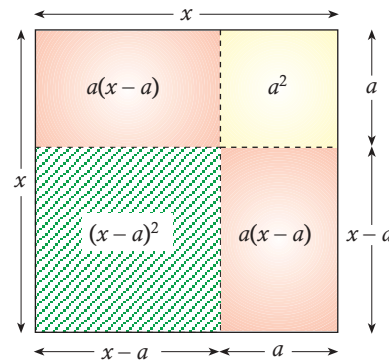


Fig. 23.2 Representación gráfica del cuadrado de la diferencia.

23.7 PRODUCTO DE UNA SUMA DE DOS TÉRMINOS POR SU DIFERENCIA

Consideremos los binomios $(x + a)$ y $(x - a)$. Si efectuamos su producto, obtenemos:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$$

Es decir:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2 \quad (23.15)$$

relación que nos dice que el producto de un binomio por su diferencia es igual a la diferencia de cuadrados de sus términos. Luego, para determinar el resultado de la multiplicación de la suma de dos términos por su diferencia, se procede de la manera siguiente:

1. Se eleva el primer término al cuadrado: x^2
2. Se eleva el segundo término al cuadrado: a^2
3. Se hace la diferencia de los cuadrados: $x^2 - a^2$

Inversamente, la factorización de una diferencia de cuadrados consiste en determinar los factores que, al multiplicarlos, originan tal diferencia de cuadrados. Esto es:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) \quad (23.16)$$

para factorizar una diferencia de cuadrados, $x^2 - a^2$, se procede según el siguiente algoritmo:

1. Se obtiene la raíz cuadrada del primer término:

$$\sqrt{x^2} = x$$

2. Se obtiene la raíz cuadrada del segundo término:

$$\sqrt{a^2} = a$$

3. Se forman los binomios $(x + a)$ y $(x - a)$

4. Se forma el producto $(x + a)(x - a)$

EJEMPLO 23.5

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 1)(x - 1)$ b) $(x + 11)(x - 11)$

c) $\left(x + \frac{3}{7}\right)\left(x - \frac{3}{7}\right)$

Solución

a) $(x + 1)(x - 1)$:

Primer término elevado al cuadrado: x^2

Segundo término elevado al cuadrado: $1^2 = 1$

Diferencia de cuadrados: $x^2 - 1$

$$(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$$

b) $(x + 11)(x - 11)$:

Primer término elevado al cuadrado: x^2

Segundo término elevado al cuadrado: $11^2 = 121$

Diferencia de cuadrados: $x^2 - 121$

$$(x + 11)(x - 11) = x^2 - 121$$

c) $\left(x + \frac{3}{7}\right)\left(x - \frac{3}{7}\right)$:

Primer término al cuadrado: x^2

Segundo término al cuadrado: $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$

Diferencia de cuadrados: $x^2 - \frac{9}{49}$

$$\left(x + \frac{3}{7}\right)\left(x - \frac{3}{7}\right) = x^2 - \frac{9}{49}$$

EJEMPLO 23.6

Factoriza las diferencias de cuadrados:

a) $x^2 - 49$ b) $x^2 - \frac{16}{36}$ c) $25x^2 - 64$

Solución

a) $x^2 - 49$

Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{x^2} = x$

Raíz cuadrada del segundo término: $\sqrt{49} = 7$

Luego:

$$x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$$

b) $x^2 - \frac{16}{36}$

Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{x^2} = x$

Raíz cuadrada del segundo término: $\sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{4}{6}$

Luego:

$$x^2 - \frac{16}{36} = \left(x + \frac{4}{6}\right)\left(x - \frac{4}{6}\right)$$

c) $25x^2 - 64$

Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{25x^2} = 5x$

Raíz cuadrada del segundo término: $\sqrt{64} = 8$

Luego:

$$25x^2 - 64 = (5x + 8)(5x - 8)$$

23.5 Desarrolla los siguientes productos:



- a) $(x+2)(x-2)$ b) $(x+13)(x-13)$
 c) $\left(x + \frac{1}{10}\right)\left(x - \frac{1}{10}\right)$ d) $\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)$
 e) $(4x+7)(4x-7)$ f) $\left(x + \sqrt{m}\right)\left(x - \sqrt{m}\right)$
 g) $(5x+4)(5x+4)$ h) $(3x-7)(3x-7)$
 i) $(px+q)(px-q)$

23.6 Factoriza las diferencias de cuadrados siguientes:

- a) $x^2 - 25$ b) $x^2 - 169$ c) $x^2 - \frac{1}{4}$
 d) $x^2 - \frac{16}{64}$ e) $36x^2 - 16$ f) $\frac{1}{100}x^2 - 1$
 g) $\frac{4}{64}x^2 - 16$ h) $ax^2 - 1$

23.8 VISUALIZACIÓN GRÁFICA DE UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS

Como ya establecimos, una diferencia de cuadrados puede ser expresada como:

$$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a) \quad (23.14)$$

En la fig. 23.3 se tiene un rectángulo de lados x y $x+a$.

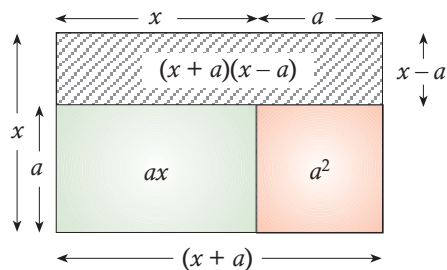


Fig. 23.3 Representación gráfica de una diferencia de cuadrados.

La zona rayada corresponde al rectángulo de área $(x+a)(x-a)$, que se puede expresar como:

$$\begin{aligned} (x+a)(x-a) &= x(x+a) - a^2 - ax = \\ &= x^2 + ax - a^2 - ax = \\ &= x^2 - a^2 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$

24

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

24.1 DIVISIÓN DE MONOMIOS

Considera los monomios ax^m y bx^n . Si se divide el primero entre el segundo, el resultado es:

$$\frac{ax^m}{bx^n} = \frac{a}{b} x^{m-n} \quad (24.1)$$

donde $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}^*$, $m, n \in \mathbb{N}$ y $m \geq n$.

La relación (24.1) establece que para dividir el monomio ax^m entre el monomio bx^n , se divide el coeficiente a entre el coeficiente b . La variable x resulta elevada a la potencia $m - n$. El coeficiente a pertenece al conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. El coeficiente b pertenece al conjunto $\mathbb{Q}^*$ de los números racionales distintos a cero. El exponente m debe ser mayor o igual al exponente n para que x aparezca en el resultado elevada a un número positivo.

EJEMPLO 24.1

Divide los siguientes monomios:

a) $x^7 \div x^3$ b) $10x^5 \div 5x^2$ c) $8x^4 \div (-2x)$

d) $-16x^5 \div 2x^4$ e) $-14x^8 \div (-7x^5)$

f) $20x^2 \div 5x^2$

Solución

a) $\frac{x^7}{x^3} = x^{7-3} = x^4$

b) $\frac{10x^5}{5x^2} = \frac{10}{5} x^{5-2} = 2x^3$

c) $\frac{8x^4}{-2x} = \frac{8}{-2} x^{4-1} = -4x^3$

d) $\frac{-16x^5}{2x^4} = \frac{-16}{2} x^{5-4} = -8x$

e) $\frac{-14x^8}{-7x^5} = \frac{-14}{-7} x^{8-5} = 2x^3$

f) $\frac{20x^2}{5x^2} = \frac{20}{5} x^{2-2} = 4x^0 = 4$

24.2 DIVISIÓN DE UN POLINOMIO ENTRE UN MONOMIO

Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio. Los siguientes ejemplos muestran el método.

EJEMPLO 24.2

Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(18x^4 + 9x^3) \div 3x$ b) $(16x^2 - 4x) \div (-2x)$

c) $(20x^3 - 8x^2 + 12x - 4) \div 4$

d) $(48x^3 - 24x^2 + 8x) \div (-4x)$

Solución

a) $\frac{18x^3 + 9x^4}{3x} = \frac{18}{3} x^{4-1} + \frac{9}{3} x^{3-1} = 6x^3 + 3x^2$

b) $\frac{16x^2 - 4x}{-2x} = \frac{16}{-2} x^{2-1} + \frac{4}{-2} x^{1-1} = -8x + 2$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{20x^3 - 8x^2 + 12x - 4}{4} &= \frac{20}{4}x^3 - \frac{8}{4}x^2 + \frac{12}{4}x - \frac{4}{4} = \\ &= 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{48x^3 - 24x^2 + 8x}{-4x} &= \frac{48}{-4}x^{3-1} - \frac{24}{-4}x^{2-1} + \frac{8}{-4}x^{1-1} = \\ &= -12x^2 + 6x - 2 \end{aligned}$$



24.1 Divide los siguientes monomios:

$$\text{a) } x^6 \div x^3 \qquad \text{b) } 100x^7 \div 10x^2$$

$$\text{c) } (-18x^3) \div 9x \qquad \text{d) } 35x^{10} \div (-7x^6)$$

$$\text{e) } 88x^{18} \div 4x^{11} \qquad \text{f) } 11x^2 \div x^2$$

$$\text{g) } 7x^3 \div 11x \qquad \text{h) } \frac{2}{7}x^8 \div \frac{14}{3}x^5$$

$$\text{i) } \left(-\frac{3}{4}x^6\right) \div \left(\frac{2}{3}x^5\right)$$

24.2 Efectúa las siguientes divisiones:

$$\text{a) } (5x^2 - 15x) \div 5x$$

$$\text{b) } (36x^7 - 12x^5 + 60x^2) \div 6x$$

$$\text{c) } (110x^5 - 220x^3 - 55x + 22) \div (-11)$$

$$\text{d) } (3x^6 - 18x^4 + x^2) \div 5x^2$$

$$\text{e) } \left(\frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{7}x\right) \div \frac{3}{7}x$$

$$\text{f) } \left(\frac{2}{3}x^{10} - \frac{7}{8}x^8 + \frac{5}{7}x^3\right) \div \left(-\frac{3}{5}x^2\right)$$

24.3 DIVISIÓN DE UN POLINOMIO ENTRE OTRO POLINOMIO

Para dividir un polinomio entre otro polinomio, se usa un procedimiento similar al de la división de números enteros. En general, si P es el **polinomio dividendo** y Q es el **polinomio divisor**, se puede escribir:

$$P = Q \cdot C + R \quad (24.2)$$

donde C es el **polinomio cociente** y R es el **polinomio residuo o resto**. Cuando $R = 0$, la división es exacta y (24.2) se puede escribir como:

$$P = Q \cdot C \quad (24.3)$$

El proceso de división de un polinomio entre otro se simplifica si ambos se ordenan en orden decreciente. Los ejemplos que siguen indican la forma de proceder.

EJEMPLO 24.3

Efectúa la siguiente división:

$$(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$$

Solución

Primero colocamos el dividendo y el divisor en la forma ya familiar:

$$x^2 + 5x + 6 \quad \overline{) x + 2}$$

Observa que los polinomios están arreglados en orden decreciente. El procedimiento se continúa de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x + 6 \quad \overline{) x + 2} \\ \underline{x} \\ 2x + 2 \end{array}$$

Se divide mentalmente x^2 entre x . Se obtiene $+x$ en el cociente que se coloca debajo del divisor.

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x + 6 \quad \overline{) x + 2} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ 3x + 2 \end{array}$$

Se multiplica x por $(x+2)$ y el resultado, $x^2 + 2x$, se coloca debajo del dividendo en el orden apropiado. Es decir, las potencias iguales de x se ponen una debajo de la otra.

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x + 6 \\ x^2 + 2x \\ \hline 0 + 3x + 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2 \\ x \end{array}$$

Se resta $x^2 + 2x$ del dividendo. Así, $x^2 - x^2 = 0$ y $5x - 2x = 3x$. Nos queda el binomio $3x + 6$ como dividendo.

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x + 6 \\ x^2 + 2x \\ \hline 0 + 3x + 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2 \\ x + 3 \end{array}$$

Se divide mentalmente $3x$ entre x . El resultado es 3. Este resultado se coloca en el cociente.

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x + 6 \\ x^2 + 2x \\ \hline 0 + 3x + 6 \\ 3x + 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2 \\ x + 3 \end{array}$$

Se multiplica 3 por $x + 2$ y el resultado, $3x + 6$, se coloca debajo del dividendo.

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x + 6 \\ x^2 + 2x \\ \hline 0 + 3x + 6 \\ 3x + 6 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2 \\ x + 3 \end{array}$$

Se resta $3x + 6$ del dividendo. El resultado es cero y la división termina.

Como el resto es cero ($R = 0$) y el cociente es $x + 3$, se puede escribir:

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = x + 3$$

El ejemplo estudiado corresponde a una división exacta. Es decir, el resto R es igual a cero. Cuando la división es inexacta, el resto no es cero y se cumple la relación (24.2).

EJEMPLO 24.4

Efectúa la siguiente división:

$$(10x^2 - 29x + 12) \div (5x - 2)$$

Solución

Se divide $10x^2$ entre $5x$. Se obtiene así $2x$ que se multiplica por $(5x - 2)$. El resultado es:

$$2x(5x - 2) = 10x^2 - 4x$$

Este resultado se resta de $10x^2 - 29x + 12$:

$$\begin{array}{r} 10x^2 - 29x + 12 \\ 10x^2 - 4x \\ \hline -25x + 12 \\ -25x + 10 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5x - 2 \\ 2x - 5 \end{array}$$

$$(10x^2 - 29x + 12) - (10x^2 - 4x) = -25x + 12$$

Se divide ahora $-25x$ por $5x$. El resultado es -5 , que se multiplica por $5x - 2$:

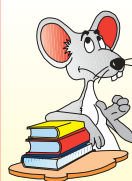
$$(-5) \cdot (5x - 2) = -25x + 10$$

Este último resultado se resta de $-25x + 12$:

$$-25x + 12 - (-25x + 10) = -25x + 12 - 25x - 10 = 2$$

Entonces, el polinomio $P = 10x^2 - 29x + 12$ se puede escribir en términos de $Q = 5x - 2$ como:

$$10x^2 - 29x + 12 = (5x - 2)(2x - 5) + 2$$



EJERCICIOS



24.3 Efectúa las siguientes divisiones de monomios:

a) $x^{11} \div x^5$

b) $15x^7 \div 3x^4$

c) $14x^6 \div (-2x^5)$

d) $-24x^{10} \div 3x^8$

e) $-52x^{20} \div (-13x^{14})$

f) $10x \div 5x$

g) $\frac{3}{4}x^9 \div \frac{4}{5}x^3$

h) $-\frac{1}{5}x^3 \div 2x$

i) $-\frac{3}{7}x^5 \div (-8)$

24.4 Divide:

a) $(12x^5 - 36x^3 + 24x^2) \div 4x^2$

b) $(-96x^7 + 48x^5 + 12x^3) \div (-6x^2)$

c) $(21x^8 - 28x^4 + 42x^3) \div 7x^3$

d) $(100x^2 + 5x - 18) \div (-10)$

e) $\left(\frac{3}{4}x^7 - \frac{1}{5}x^5 + 2x^4\right) \div \frac{2}{5}x^4$

f) $\left(\frac{3}{7}x^{10} + \frac{5}{9}x^7 - \frac{3}{8}x^3 + 5x^2\right) \div \left(-\frac{3}{4}x\right)$

24.5 Efectúa las siguientes divisiones de polinomios. En todos los casos, expresa el resultado en la forma $P = Q \cdot C + R$.

a) $(3x^2 + 8x - 3) \div (x + 3)$

b) $(30x^3 + 34x - 26x^2 - 6) \div (10x - 2)$

c) $(x^2 - 5x - 14) \div (x - 7)$

d) $(81x^3 + 38x + 35) \div (9x + 5)$

e) $(8x^3 + 4x^2 + 4x + 1) \div (4x^2 + 2x + 2)$

f) $(x^4 + 1) \div (x^2 - 1)$

g) $(x^4 - 4) \div (x^2 + 2)$

h) $(x^3 + 1) \div (x + 1)$

i) $(x^7 + 2x^5 - 3x + 4) \div (x^5 + 3x)$

j) $(3x^5 + 5x^2 - 4) \div (x^2 + x + 1)$

25

VALOR NUMÉRICO DE UN
POLINOMIO25.1 VALOR NUMÉRICO DE UNA
FUNCIÓN POLINÓMICA

Considera el polinomio:

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 1 \quad (25.1)$$

Si la variable x es sustituida por cualquier número $a \in \mathbf{Q}$ en la expresión anterior, se obtiene:

$$f(a) = 2a^2 + 5a + 1 \quad (25.2)$$

Por ejemplo: si $a = 2$, tendremos:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2(2)^2 + 5(2) + 1 = 2 \cdot 4 + 10 + 1 = \\ &= 8 + 10 + 1 = 19 \end{aligned}$$

Al número racional obtenido, en este caso 19, se le conoce como *valor numérico de la función polinómica para $x = 2$* .

EJEMPLO 25.1

Determina el valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = 5$, $x = -2$ y $x = 0$:

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } x = 5 \quad P(5) &= 2 \cdot 5^3 - 5 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 - 4 \\ P(5) &= 2 \cdot 125 - 5 \cdot 25 + 15 - 4 = \\ &= 250 - 125 + 15 - 4 = \end{aligned}$$

$$P(5) = 136$$

$$\text{b) } x = -2 \quad P(-2) = 2(-2)^3 - 5(-2)^2 + 3(-2) - 4$$

$$\begin{aligned} P(-2) &= 2(-8) - 5 \cdot 4 - 6 - 4 = \\ &= -16 - 20 - 6 - 4 \end{aligned}$$

$$P(-2) = -46$$

$$\text{c) } x = 0 \quad P(0) = 2 \cdot 0^3 - 5 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 4$$

$$P(0) = -4$$

EJEMPLO 25.2

Determina el valor numérico del polinomio $f(x)$ para los siguientes valores de x :

$$f(x) = x^2 + 3x + 1 \quad x = \frac{1}{2} \quad x = -\frac{2}{3}$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{1+6+4}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x = -\frac{2}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{2}{3}\right) &= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = \\ &= \frac{4}{9} - 2 + 1 = \frac{4-18+9}{9} = -\frac{5}{9} \Rightarrow f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{9} \end{aligned}$$

25.2 CEROS DE UNA FUNCIÓN POLI-
NÓMICA

Los números racionales que anulan una función polinómica se conocen con el nombre de **ceros de la misma**. A los ceros de una función polinómica también se les conoce como **raíces del polinomio**. Así, por ejemplo, $x = 1$ es un cero de la función $f(x) = x - 1$, porque:

$$f(1) = 1 - 1 = 0$$

De la misma manera, podemos afirmar que $x = -1$ es un cero de la función $P(x) = x^2 - 3x - 4$, porque:

$$P(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$$

EJEMPLO 25.3

Determina si $x = 1$, $x = 2$ y $x = -3$ son raíces del polinomio:

$$P(x) = x^2 - 5x + 6$$

Solución

$$\text{a) } x = 1 \Rightarrow P(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$$

Como $P(1) \neq 0$, $x = 1$ no es una raíz de $P(x)$.

$$\text{b) } x = 2 \Rightarrow P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

Como $P(2) = 0$, $x = 2$ es una raíz de $P(x)$.

$$\begin{aligned} \text{c) } x = -3 \Rightarrow P(-3) &= (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 6 = \\ &= 9 + 15 + 6 = 30 \end{aligned}$$

Como $P(-3) \neq 0$, $x = -3$ no es una raíz de $P(x)$.

EJEMPLO 25.4

Comprueba que $x = -\frac{2}{3}$ y $x = \frac{1}{4}$ son raíces del polinomio:

$$P(x) = 2x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$$

Solución

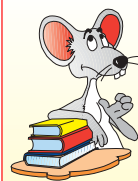
$$\text{a) } x = -\frac{2}{3} \Rightarrow P\left(-\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) +$$

$$-\frac{1}{3} = \frac{8}{9} - \frac{10}{18} - \frac{1}{3} = \frac{16 - 10 - 6}{18} = 0$$

Como $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$, $-\frac{2}{3}$ es un cero de $P(x)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } x = \frac{1}{4} \Rightarrow P\left(\frac{1}{4}\right) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{8} + \frac{5}{24} - \frac{1}{3} = \frac{3 + 5 - 8}{24} = 0 \end{aligned}$$

Como $P\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, $\frac{1}{4}$ es un cero de $P(x)$.



EJERCICIOS



25.1 Dados los polinomios:

$$\text{a) } P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$$

$$\text{b) } P(x) = -2x^2 + 5x - 2$$

Determina el valor numérico de $P(x)$ para

$$x = 0, -1, -\frac{1}{3} \text{ y } \frac{1}{2}.$$

25.2 Dados los polinomios, determina la

función $f(x)$ para $x = 0, -1, 2\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{2}$:

$$\text{a) } f(x) = 2x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{5}$$

$$\text{b) } f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x$$

25.3 Determina si $x = 1$, $x = 2$, $x = -3$ y $x = 8$, son ceros de la función:

$$P(x) = x^2 - 6x - 16$$

25.4 Dado el polinomio:

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{15}x - \frac{1}{15}$$

Determina si $x = 0$, $x = -1$, $x = \frac{1}{5}$, $x = \frac{1}{2}$ y

$x = -\frac{1}{6}$, son raíces de $f(x)$.

26

PROBABILIDAD DE SUCESOS INDEPENDIENTES

26.1 EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Como recordarás de tus estudios anteriores, la probabilidad se define como:

$$P = \frac{n}{N} \quad (26.1)$$

donde:

n = número de opciones favorables de un experimento.

N = número total de opciones del mismo experimento.

Así, cuando efectuamos el lanzamiento de una moneda y deseamos hallar la probabilidad de que salga cara, $P(c)$, tendremos:

$$P(c) = \frac{n}{N} = \frac{1}{2}$$

$n = 1$ (ya que hay una opción favorable: cara)

$N = 2$ (ya que hay dos opciones posibles: cara y sello)

Recuerda, además, que la probabilidad de que un suceso ocurra es un número comprendido entre 0 y 1. Es decir:

$$0 \leq P \leq 1 \quad (26.2)$$

26.2 SUCESOS INDEPENDIENTES

Considera los siguientes experimentos:

1.- Se tiene un dado y se le lanza dos veces de manera consecutiva ¿Cuál es la probabilidad de

obtener el número 5 en cada lanzamiento?

Para el primer lanzamiento, se tiene:

$$P(5) = \frac{n}{N} = \frac{1}{6}$$

Para el segundo lanzamiento, se tiene:

$$P(5) = \frac{n}{N} = \frac{1}{6}$$

Como puedes darte cuenta, si se obtiene 5 en el primer lanzamiento, esto no determina el que se obtenga o no se obtenga 5 en el segundo lanzamiento. Dicho en otras palabras, *que se obtenga o no se obtenga 5 en el primer lanzamiento no afecta la probabilidad de que se obtenga 5 en el segundo lanzamiento*. Si llamamos:

Suceso A : que salga 5 en el primer lanzamiento.

Suceso B : que salga 5 en el segundo lanzamiento.

diremos que A y B son sucesos independientes, porque el suceso A no tiene efecto sobre la probabilidad de que ocurra el suceso B y viceversa.

2.- Una caja contiene 4 pelotas negras y 8 blancas. Se saca una pelota, se observa su color y se repone en la caja. Luego se saca una segunda pelota de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera pelota sea negra? ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda pelota sea negra?

Primer experimento:

n = número de opciones favorables (pelotas negras) = 4

N = número de opciones posibles (pelotas negras y blancas) = 12

$$P = \frac{n}{N} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Segundo experimento:

n = número de opciones favorables (pelotas negras) = 4

N = número de opciones posibles (pelotas negras y blancas) = 12

$$P = \frac{n}{N} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

¿Hay alguna diferencia entre el primer y segundo experimento? Indudablemente, al reponer la bola, los dos experimentos son los mismos y la probabilidad de obtener una bola negra en el segundo experimento no se ve influenciada porque la bola en la primera extracción sea o no negra. *Se dice entonces que los dos experimentos son independientes.*

3.- Considera la misma caja anterior con 4 pelotas negras y 8 blancas. Se saca una pelota y no se devuelve a la caja. Si se extrae una segunda pelota, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

Primer experimento:

Al sacar la primera pelota existe la posibilidad de que ésta sea negra o blanca. Si la primera pelota es negra, en la caja quedarán 3 bolas negras y 8 blancas. Si, por el contrario, la primera pelota es blanca, quedarán en la caja 4 pelotas negras y 7 blancas.

Segundo experimento:

Al sacar la segunda pelota de la caja, la probabilidad de que sea negra, *dependerá* de cuál pelota se encuentre fuera de la caja al realizar el primer experimento. Podemos considerar dos casos:

a) Si en el primer experimento se sacó una pelota negra, la probabilidad de sacar una pelota negra en la segunda oportunidad será:

$$P = \frac{n}{N} = \frac{3}{11}$$

b) Si en el primer experimento se sacó una pelota blanca, la probabilidad de sacar una pelota negra en la segunda oportunidad será:

$$P = \frac{n}{N} = \frac{4}{11}$$

Los dos resultados anteriores son distintos, lo que indica que *la probabilidad de sacar una bola negra en la segunda oportunidad dependerá de lo que sucedió en el primer experimento. Esto significa que los dos sucesos no son independientes, ya que la probabilidad del segundo suceso es afectada por el resultado del primero.* Formalmente podemos entonces establecer:

Dos sucesos, A y B, son independientes si la probabilidad de que ocurra el suceso B no es afectada por el hecho de que ocurra el suceso A y viceversa.

26.3 PROBABILIDAD DE SUCESOS INDEPENDIENTES

Dados dos sucesos independientes, A y B, la probabilidad de su ocurrencia, denotada por $P(A \text{ y } B)$, está dada por:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B) \quad (26.3)$$

Es decir, la probabilidad de ocurrencia de A y B es igual a la probabilidad de ocurrencia de A, $P(A)$, multiplicada por la probabilidad de ocurrencia de B, $P(B)$.

EJEMPLO 26.1

Se sacan sucesivamente 3 bolas de una caja que contiene 5 bolas rojas, 3 blancas y 4 azules. Determinar la probabilidad de que la primera sea roja, la segunda blanca y la tercera azul, si las bolas son repuestas en la caja.

Solución

Llamemos:

- A: suceso correspondiente a una bola roja la primera vez.
- B: suceso correspondiente a una bola blanca la segunda vez.
- C: suceso correspondiente a una bola azul la tercera vez.

Como las bolas son repuestas cada vez que se sacan, dentro de la caja siempre habrá el mismo número de bolas y las probabilidades de sacar una

bola de un color específico no se ve afectada por el color de la bola sacada anteriormente. Esto significa que los sucesos son independientes. Por tanto, podemos escribir:

$$P(A \text{ y } B \text{ y } C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Las probabilidades $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$ están dadas por:

$$P(A) = \frac{5}{12} \quad \begin{array}{l} \text{5 bolas rojas} \\ \text{12 bolas en total} \end{array} \quad P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \begin{array}{l} \text{3 bolas blancas} \\ \text{12 bolas en total} \end{array}$$

$$P(C) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \begin{array}{l} \text{4 bolas azules} \\ \text{12 bolas en total} \end{array}$$

Luego:

$$P(A \text{ y } B \text{ y } C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{144}$$

EJEMPLO 26.2

En una caja hay 6 bolas blancas y 3 negras. En otra caja hay 8 bolas blancas y 4 negras. Se saca una bola de cada caja. Encuentra la probabilidad de que: **a)** Ambas sean blancas, **b)** ambas sean negras, **c)** la bola de la primera caja sea blanca y la bola de la segunda caja sea negra.

Solución

Como se trata de dos cajas distintas, la probabilidad de sacar una bola de cierto color de una de ellas no se ve influenciada porque se obtenga otra de cualquier color de la segunda caja. Tenemos entonces:

a) Sea $P(B_1 \text{ y } B_2)$ la probabilidad de que ambas bolas sean blancas:

$$P(B_1 \text{ y } B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2)$$

donde:

$P(B_1)$: Probabilidad de obtener una bola blanca de la 1ra. caja.

$P(B_2)$: Probabilidad de obtener una bola blanca de la 2da. caja.

Se tiene:

$$P(B_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \begin{array}{l} \text{Bolas blancas en primera caja} \\ \text{Total de bolas en primera caja} \end{array}$$

$$P(B_2) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \begin{array}{l} \text{Bolas blancas en segunda caja} \\ \text{Total de bolas en segunda caja} \end{array}$$

Luego:

$$P(B_1 \text{ y } B_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

b) Sean:

$P(N_1)$: Probabilidad de sacar una bola negra de la primera caja.

$P(N_2)$: Probabilidad de sacar una bola negra de la segunda caja.

Se tiene:

$$P(N_1 \text{ y } N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2)$$

$$P(N_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \begin{array}{l} \text{Bolas negras en primera caja} \\ \text{Total de bolas en primera caja} \end{array}$$

$$P(N_2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \begin{array}{l} \text{Bolas negras en segunda caja} \\ \text{Total de bolas en segunda caja} \end{array}$$

Entonces:

$$P(N_1 \text{ y } N_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

c) Sean:

$P(B_1)$: Probabilidad que la bola de la primera caja sea blanca.

$P(N_2)$: Probabilidad que la bola de la segunda caja sea negra.

Como los sucesos son independientes:

$$P(B_1 \text{ y } N_2) = P(B_1) \cdot P(N_2)$$

Los valores de $P(B_1)$ y $P(N_2)$ son:

$$P(B_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad P(N_2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Luego:

$$P(B_1 \text{ y } N_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

EJEMPLO 26.3

Se lanza un dado 2 veces y se desea saber la probabilidad de que salga 3 o 5 en el primer lanzamiento y 1, 3 o 6 en el segundo lanzamiento.

Solución

Llamaremos:

Suceso A : que salga 3 o 5 en el primer lanzamiento.

Suceso B : que salga 1, 3 o 6 en el segundo lanzamiento.

Los sucesos A y B son independientes, ya que la probabilidad de que salga 1, 3 o 6 en el segundo lanzamiento no está influenciado porque salga 3 o 5 en el primer lanzamiento. Podemos entonces escribir:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$$

donde:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2 opciones favorables: 3 o 5
6 opciones posibles: 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3 opciones favorables: 1, 3 o 6
6 opciones posibles: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Finalmente, se obtiene:

$$P(A \text{ y } B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

EJEMPLO 26.4

Se tiene un juego de 40 cartas, se extrae una de ellas y se repone. Posteriormente se extrae otra ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea de copa y que la segunda sea un caballo?

Solución

Sean:

Suceso A : que la primera carta sea de copa.

Suceso B : que la segunda carta sea un caballo.

Como la primera carta se repone luego que se saca, el juego de cartas en ambos experimentos permanece inalterable, por lo que la probabilidad de obtener un caballo en la segunda oportunidad no está influenciada por el hecho de que la primera carta sea copa. Es decir, los dos sucesos son independientes y podemos escribir:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$$

donde:

$P(A)$: Probabilidad de que la primera carta sea copa.

$P(B)$: Probabilidad de que la segunda carta sea un caballo.

Calculando $P(A)$ y $P(B)$:

$$P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \quad P(B) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

10 cartas de copa 4 caballos
40 cartas en total 40 cartas en total

Finalmente, se obtiene:

$$P(A \text{ y } B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$$



EJERCICIOS

26.1 ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 6 al lanzar un dado?

26.2 En una caja hay 5 pelotas negras y 4 blancas. Se saca una pelota sin ver. Determina la probabilidad de sacar: **a)** una pelota negra, **b)** una pelota blanca, **c)** una pelota azul.

26.3 En una botella hay 9 metras a las cuales se les ha asignado los números del 1 al 9. Al voltear la botella: **a)** ¿Qué probabilidad hay de que salga un número par? **b)** ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número mayor que 7?

26.4 Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que no salga 6?

26.5 En un cilindro se tienen 4 bolas negras y 5 blancas. Alfredo saca una bola al azar y no la devuelve al envase. Posteriormente saca otra bola. ¿Son los dos sucesos dependientes o independientes?

26.6 Se tiene un envase que contiene 8 bolas rojas y 2 negras. Se sacan 2 bolas, una detrás de la otra, reponiendo la primera que se sacó. **a)** ¿Son los sucesos de sacar una bola negra o una blanca independientes? **b)** ¿Cuál es la probabilidad de que se saque primero una bola negra y después una roja?

26.7 En una caja hay 5 bolas verdes, 2 rojas y 4 azules. Se sacan 2 bolas sin reponerlas en la caja. Encuentra la probabilidad de que: **a)** Ambas sean verdes. **b)** Ambas sean azules. **c)** La primera sea verde y la segunda azul. **d)** La primera sea azul y la segunda roja. **e)** Ambas sean rojas.

26.8 Se lanza un dado 2 veces y se desea saber la probabilidad de que salga 6 en el primer lanzamiento y 4 o 5 en el segundo.

26.9 Se tiene un juego de 40 cartas. Se extrae una de ellas y se repone. Luego se extrae otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea de basto y la segunda sea un as?

26.10 Se tiene un juego de 40 cartas. Se extrae una de ellas y se repone. Luego se extrae otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea de oro o espada y la segunda sea de copa?

27

MEDIA ARITMÉTICA. MODA.

27.1 MEDIA ARITMÉTICA DE DATOS NO ORGANIZADOS. MODA DE UNA DISTRIBUCIÓN.

Dado un conjunto de n números $x_1, x_2, \dots, x_n$, la media aritmética o promedio de los mismos, $\bar{x}$ se define como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (27.1)$$

La suma de los n números se puede expresar como:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum x_i \quad (27.2)$$

donde el símbolo $\sum x_i$ significa la suma de todos los números. La relación (27.1) nos queda entonces:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \quad (27.3)$$

En un conjunto de números, *la moda es el valor que se presenta con mayor frecuencia*. Un conjunto de datos puede o no tener una moda, y en caso de que ésta exista, puede no ser única. Cuando en un conjunto de datos hay una sola moda, se dice que el conjunto es **unimodal**. Si hay dos modas, el conjunto es **bimodal**.

EJEMPLO 27.1

Determina la media aritmética de los números 14, 16, 18, 10, 12 y 15.

Solución

Como hay seis números, $n = 6$. De acuerdo con la relación 27.1, se tendrá:

$$\bar{x} = \frac{14 + 16 + 18 + 10 + 12 + 15}{6} = \frac{85}{6} = 14,16$$

EJEMPLO 27.2

Las notas obtenidas por Ernesto en el 7mo. grado fueron: 16, 14, 16, 15, 20, 13, 15, 18, 19 y 15. Determina su promedio ¿Cuál es la moda?

Solución

Usando la relación (27.1) con $n = 10$:

$$\bar{x} = \frac{16 + 14 + 16 + 15 + 20 + 13 + 15 + 18 + 19 + 15}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{161}{10} = 16,1$$

La nota que tiene lugar con mayor frecuencia es 15 y, por tanto, la moda es 15.

EJEMPLO 27.3

Para ingresar a una universidad, se exige un promedio de notas igual o mayor que 16,8 puntos en los cinco años anteriores al ingreso. Héctor obtuvo los siguientes promedios en los cuatro años anteriores: 15,3; 16,7; 18,1 y 16,2. Si está cursando el quinto año, ¿qué promedio debe obtener para poder ingresar a la universidad?

Solución

El promedio de notas necesario para ingresar a la Universidad es $x = 16,8$. Si llamamos x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 a los promedios obtenidos en los cinco años, podemos escribir:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

De acuerdo con el enunciado del problema, conocemos:

$$x_1 = 15,3 \quad x_2 = 16,7 \quad x_3 = 18,1 \quad x_4 = 16,2$$

Sustituyendo valores:

$$16,8 = \frac{15,3 + 16,7 + 18,1 + 16,2 + x_5}{5}$$

donde x_5 es el promedio que Héctor debe obtener en el quinto año para acumular un promedio total igual a 16,8. De la relación anterior, debemos despejar x_5 :

$$16,8 = \frac{66,3 + x_5}{5}$$

Pasando 5 al primer miembro:

$$16,8 \cdot 5 = 66,3 + x_5 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 84,0 - 66,3$$

De donde:

$$x_5 = 17,7$$

Es decir, Héctor debe obtener un promedio mayor o igual que 17,7 puntos para poder ingresar a la universidad.

EJEMPLO 27.4

En los conjuntos de números dados, determina la moda:

- a) {17; 18; 19; 17,6; 20; 25}
- b) {14; 13; 8; 17; 15; 14; 12; 14; 14; 17}
- c) {5; 4; 3,2; 3; 7; 5; 5; 3,2; 7; 3,2}

Solución

a) El conjunto dado no tiene moda, ya que ningún valor se repite.

b) El número 14 es el que más se repite y es, por tanto, la moda. Como hay una sola moda, el conjunto es unimodal. Observa que aunque el número 17 se repite, la frecuencia de repetición es menor que la de 14.

c) Los números 5 y 3,2 se repiten cada uno 3 veces. Luego hay dos modas: 5 y 3,2. El conjunto es, por tanto, bimodal.



27.1 Determina la media aritmética y la moda de los siguientes conjuntos de números:

- a) {3, 10, 7, 8, 5, 1, 6}
- b) {2,4; 7,8; 6,25; 7,8; 6; 3,2; 8; 7,8}
- c) {120, 120, 100, 113, 95, 108, 100, 120, 115, 100}
- d) {17,6; 18; 15; 14; 15; 17,3; 16,2; 14}

27.2 Las notas obtenidas por Mónica en el 7mo. grado fueron: 15, 16, 12, 18, 14, 17, 15, 14, 17 y 19. Determina su promedio ¿Cuál es la moda?

27.3 Miriam presentó exámenes de 6 materias y obtuvo las siguientes calificaciones: 14, 15, 13, 18, 17 y 16. Si le falta sólo una materia por presentar, ¿qué nota debe sacar para obtener un promedio mínimo de 15,7 puntos?

27.4 Para ingresar a una universidad, se necesita un promedio igual o mayor que 17 puntos en los cinco años anteriores al ingreso. Marta obtuvo los siguientes promedios en los primeros cuatro años: 16; 17,2; 16,5 y 17. Si está cursando el quinto año, ¿qué promedio debe sacar durante ese año para poder ingresar a la universidad?

27.2 FRECUENCIA ABSOLUTA. DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS.

Considera la tabla de la fig. 27.1, donde se presentan las alturas en metros de los 45 estudiantes de un salón de clases.

1,56 1,58 1,57 1,58 1,58 1,59
 1,62 1,59 1,57 1,60 1,57 1,59
 1,61 1,60 1,61 1,57 1,58 1,58
 1,60 1,63 1,58 1,57 1,56 1,58
 1,57 1,60 1,61 1,56 1,59 1,57
 1,58 1,62 1,62 1,58 1,57 1,60
 1,62 1,58 1,56 1,57 1,59 1,60
 1,59 1,62 1,57

Fig. 27.1 Altura en metros de los 45 estudiantes de un salón de clases.

En la tabla anterior, los datos correspondientes a las alturas de los estudiantes no están organizados siguiendo cierto orden numérico. Por tal motivo, la fig. 27.1 corresponde a una tabla de *datos no organizados*.

A fin de facilitar el análisis estadístico de los datos es conveniente ordenarlos en orden creciente o decreciente de magnitud. Similarmente, es conveniente especificar el número de veces que se repite un determinado dato. A los datos así ordenados se les denomina *datos organizados*.

Al número de veces que se repite un dato se le denomina **frecuencia absoluta**, f .

Si ordenamos en orden creciente los datos de la fig. 27.1, obtenemos la tabla de la fig. 27.2. Allí, cada uno de los datos aparece con la frecuencia que le corresponde. A dicha tabla, con los datos organizados y mostrando la frecuencia de cada uno de ellos, se le conoce con el nombre de *distribución de frecuencias*.

Altura (m)	Frecuencia absoluta (f)
1,56	4
1,57	10
1,58	10
1,59	6
1,60	6
1,61	3
1,62	5
1,63	1

Fig. 27.2 Distribución de frecuencias para los datos de la fig. 27.1.

27.3 DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS PARA DATOS AGRUPADOS

Cuando se tiene una gran cantidad de números, el proceso de sacar conclusiones sobre los mismos se hace lento y tedioso. Por esta razón, los datos son «comprimidos» de forma tal que su análisis se facilite.

Observa los datos de la fig. 27.3. Los mismos corresponden a las notas obtenidas por 100 alumnos del curso de Inglés de 7mo. grado en el liceo "Cruz Salmerón Acosta", de Cumaná.

6 20 8 19 9 17
 11 16 10 15 12 14
 13 15 14 16 14 16
 13 17 16 13 16 6
 13 14 12 12 17 15
 10 16 12 16 12 6
 14 15 13 14 13 12
 15 14 10 13 12 16
 10 16 17 13 14 8
 13 11 16 13 15 12
 12 13 10 13 18 14
 13 9 17 18 14 15
 14 12 14 12 14 18
 12 14 13 12 19 13
 15 20 12 13 19 17
 11 15 14 12 13 14
 14 14 15 12

Fig. 27.3 Notas obtenidas por los alumnos del 7mo. grado de Inglés del liceo "Cruz Salmerón Acosta", de Cumaná.

En la fig. 27.4 se muestra la distribución de frecuencias y la frecuencia acumulada f_a .

Notas	f	f_a
6	3	3
7	0	3
8	2	5
9	2	7
10	5	12
11	3	15
12	16	31
13	17	48
14	18	66
15	10	76
16	10	86
17	6	92
18	3	95
19	3	98
20	2	100

Fig. 27.4 Distribución de frecuencias para la tabla de la fig. 27.3.

A fin de "comprimir" los datos, éstos son divididos en intervalos de clases o simplemente clases, que permiten la visualización y el análisis de los mismos de manera más fácil. En la fig. 27.5 se han agrupado los datos en 5 intervalos de clase.

Notas	f	f_a
6 – 8	5	5
9 – 11	10	15
12 – 14	51	66
15 – 17	26	92
18 – 20	8	100

Intervalos
de clase

Fig. 27.5 Agrupación de los datos de la fig. 27.4 en intervalos de clase.

De la fig. anterior se deduce:

Primera clase: 6 - 8
 Segunda Clase: 9 - 11
 Tercera clase: 12 - 14
 Cuarta clase: 15 - 17
 Quinta clase: 18 - 20

Es decir, la primera clase cubre las notas comprendidas entre 6 y 8 puntos, la segunda clase las notas entre 9 y 11 y así sucesivamente. Como podrás notar, todos los intervalos de clase de la fig. 27.5 son iguales. Esto no tiene que ser necesariamente así, pero hay algunas ventajas de que así sea. En este libro usaremos sólo intervalos de clases iguales. A continuación discutiremos algunas definiciones relativas a los intervalos de clase.

a. Límite de clase

Son los números extremos de cada intervalo de clase. Para el caso que estamos estudiando tendremos:

	Límites de clase
Primera Clase : 6 – 8	6, 8
Segunda Clase : 9 – 11	9, 11
Tercera Clase : 12 – 14	12, 14
Cuarta Clase : 15 – 17	15, 17
Quinta Clase : 18 – 20	18, 20

b. Límites inferior y superior de una clase

Se refiere al número menor y número mayor en

los distintos intervalos de clase:

	Límite Inferior	Límite Superior
Primera Clase : 6 – 8	6	8
Segunda Clase: 9 – 11	9	11
Tercera Clase : 12 – 14	12	14
Cuarta Clase : 15 – 17	15	17
Quinta Clase : 18 – 20	18	20

c. Longitud o amplitud de un intervalo de clase

Es la diferencia entre los límites superior e inferior de un intervalo de clase. Si esta diferencia es la misma para todos los intervalos de clase, éstos tienen la misma longitud. Este es el caso para todos los intervalos del ejemplo que estamos estudiando:

	Longitud del Intervalo
Primera Clase : 6 – 8	2
Segunda Clase : 9 – 11	2
Tercera Clase : 12 – 14	2
Cuarta Clase : 15 – 17	2
Quinta Clase : 18 – 20	2

d. Punto medio de una clase

Corresponde a la semisuma de los límites inferior y superior de la clase:

	Punto Medio
Primera Clase : 6 – 8	$\frac{6 + 8}{2} = \frac{14}{2} = 7$
Segunda Clase : 9 – 11	$\frac{9 + 11}{2} = \frac{20}{2} = 10$
Tercera Clase : 12 – 14	$\frac{12 + 14}{2} = \frac{26}{2} = 13$
Cuarta Clase : 15 – 17	$\frac{15 + 17}{2} = \frac{32}{2} = 16$
Quinta Clase : 18 – 20	$\frac{18 + 20}{2} = \frac{38}{2} = 19$

EJEMPLO 27.5

Durante el período 1ro. de Enero y 30 de Abril de 1976, 24 fincas del país sembraron maní, encontrándose que la cantidad de hectáreas sembradas se distribuyó de acuerdo con la tabla de la fig. 27.6. Construye una tabla de distribución de frecuencias con varios intervalos de clase. Interpreta los resultados.

1,5	2,5	2,0	10,0	3,5
5,0	2,5	4,0	4,0	10,0
8,0	3,0	10,0	2,0	3,5
2,5	3,0	5,0	3,5	10,0
4,0	8,0	10,0	5,0	

Fig. 27.6 Cantidad de hectáreas sembradas de maní en 24 fincas del país, entre enero y abril de 1976. Ejemplo 27.5.

Solución

Primero ordenaremos los datos en forma creciente anotando la frecuencia de los mismos. Esto se muestra en la fig. 27.7.

Hectáreas	f
1,5	1
2,0	2
2,5	3
3,0	2
3,5	3
4,0	3
5,0	3
8,0	2
10,0	5

Fig. 27.7 Ordenación de los datos de la fig. 27.6 en forma creciente.

Hectáreas	f
0 - 2,99	6
3 - 5,99	11
6 - 8,99	2
9 - 11,99	5

Fig. 27.8 Agrupación de los datos de la fig. 27.7 en 4 intervalos de clase.

Una ordenación de los datos en 4 intervalos de clase se muestra en la fig. 27.8. Cada intervalo tiene una longitud de 2,99. Debes tener en cuenta que los intervalos de clase seleccionados son, en cierta manera arbitrarios y por lo tanto, tú puedes elegir otros intervalos diferentes a los de la fig. 27.8. De la tabla de la fig. 27.8 se puede deducir:

- a. 6 fincas sembraron entre 0 y 2,99 hectáreas de maní.

- b. 11 fincas sembraron entre 3 y 5,99 hectáreas de maní.
- c. 2 fincas sembraron entre 6 y 8,99 hectáreas de maní.
- d. 5 fincas sembraron entre 9 y 11,99 hectáreas de maní.

27.4 MEDIA ARITMÉTICA Y MODA DE DATOS ORGANIZADOS

Para calcular la media aritmética de datos organizados en intervalos de clase, se utiliza la relación:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_ix_i}{f_1 + f_2 + \dots + f_i} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} \quad (27.4)$$

donde:

$f_1, f_2, \dots, f_i$ = frecuencias de los intervalos de clase.

$x_1, x_2, \dots, x_i$ = puntos medios de los intervalos de clase.

Como la suma $\sum f_i = n$, la relación (27.4) nos queda como:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{n} \quad (27.5)$$

donde n es el número total de datos en la distribución.

Cuando los datos están organizados en intervalos de clase no se habla de moda, sino de **clase modal**. La clase modal en una distribución organizada en intervalos de clase, es *aquella que aparece con mayor frecuencia*.

EJEMPLO 27.6

En un examen de matemática, las notas se distribuyeron de acuerdo con la tabla de la fig. 27.9. a) Calcula la media aritmética. b) ¿Cuál es la clase modal?

Notas	f
9 - 11	5
12 - 14	14
15 - 17	9
18 - 20	2

Fig. 27.9 Ejemplo 27.6.

Notas	f_i	x_i	$f_i x_i$
9 - 11	5	10	50
12 - 14	14	13	182
15 - 17	9	16	144
18 - 20	2	19	38
$\Sigma x_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 414$	

Fig. 27.10 Cálculo de Σf_i y $\Sigma f_i x_i$ para el ejemplo 27.6.**Solución**

a) A partir de los datos de la fig. 27.9, construimos la tabla de la fig. 27.10. Aplicando la relación (27.4):

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{414}{30} = 13,8$$

b) La clase modal corresponde a la clase (12 - 14) que es la que aparece con mayor frecuencia.

EJEMPLO 27.7

La altura en cm de los estudiantes de un salón de clases se muestra en la fig. 27.11. a) A partir de los datos, determina la altura promedio de los estudiantes. b) Organiza los datos en intervalos de clase de longitud igual a 2. c) A partir de los datos organizados en intervalos de clase, determina nuevamente la altura promedio. d) ¿Cuál es la clase modal?

160	164	165	161	166	162	164
163	169	168	167	161	167	158
165	168	164	168	171	166	164
167	166	168	172	161	162	169
165	170	167	168	170	173	168
171	167	172	175	169		

Fig. 27.11 Ejemplo 27.7: distribución de la altura de los estudiantes de un salón de clases.

Solución

a) De acuerdo con la relación (27.3), la media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{6.666}{40} = 166,65$$

b) Las alturas mínima y máxima son 158 cm y 175 cm, respectivamente. Como la longitud de cada intervalo es igual a 2, podemos construir la tabla de la fig. 27.12.

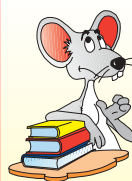
Altura	f_i	x_i	$f_i x_i$
158 - 160	2	159	318
161 - 163	6	162	972
164 - 166	10	165	1.650
167 - 169	14	168	2.352
170 - 172	6	171	1.026
173 - 175	2	174	348
$\Sigma x_i = 40$		$\Sigma f_i x_i = 6.666$	

Fig. 27.12 Organización de los datos en intervalos de clase para el ejemplo 27.7.

c) De acuerdo con la relación (27.4), podemos escribir:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{6.666}{40} = 166,65$$

d) La clase modal es (167 - 169) que es la que presenta mayor frecuencia.

**EJERCICIOS**

27.5 La fig. 27.13 presenta las notas obtenidas por 20 estudiantes de Castellano. a) Organiza los datos en intervalos de clase igual a 2. b) A partir de los datos organizados en intervalos de clase, determina la nota promedio. c) ¿Cuál es la clase modal?

9	12	13	13	15	12	14
10	14	18	13	10	17	13
11	16	14	20	12	16	

Fig. 27.13 Notas de un examen de Castellano. Ejercicio 27.5.

27.6 Las inasistencias a clases de un grupo de 48 estudiantes durante el año escolar 1986-1987 se presentan en la tabla de la fig. 27.14. Elabora: **a)** Una tabla de frecuencias (absoluta y acumulada). **b)** Una tabla de frecuencias con datos agrupados en intervalos de clase. **c)** Dibuja el histograma y el polígono de frecuencias de los datos. **d)** Interpreta la información del histograma.

2	9	3	4	5	7
8	10	8	10	4	10
8	10	4	10	2	4
8	4	5	7	4	1
4	9	10	10	4	10
10	0	8	10	8	2
4	10	6	8	6	6
2	8	0	8	6	4

Fig. 27.14 Ejercicio 27.6.

27.7 La altura en centímetros de 40 estudiantes de la escuela Rómulo Gallegos se muestra en la tabla de la fig. 27.15. Dibuja un histograma correspondiente a esos datos.

156	163	160	162	158	163
159	161	164	162	164	165
159	166	160	164	161	165
164	166	167	161	164	163
167	158	164	162	168	169
164	159	166	157	169	165
167	164	169	170		

Fig. 27.15 Ejercicio 27.7.

27.8 Con el fin de determinar la posible adulteración de las pesas de un mercado público, la Oficina de Protección al Consumidor tomó un peso estándar de 1 kg y procedió a constatar lo que marcaban 50 pesas. Los resultados se muestran en la fig. 27.16. Dibuja: **a)** Un gráfico de barras verticales de los datos. **b)** Un histograma. **c)** El polígono de frecuencias. **d)** Interpreta los resultados.

0,95	1,05	1,00	1,05	1,10	1,00	1,05
1,00	1,15	1,15	1,05	1,10	0,95	1,10
1,00	1,05	1,10	1,05	1,15	1,20	1,00
1,05	1,00	1,10	0,95	1,05	1,00	1,10
1,15	1,15	1,10	1,00	1,10	1,00	1,05
1,00	1,10	1,15	1,20	1,20	1,05	1,10
0,95	1,15	1,00	1,05	1,00	1,05	1,15
1,20						

Fig. 27.16 Ejercicio 27.8.

28

DIAGRAMAS DE FLUJO

28.1 ALGORITMO. DIAGRAMAS DE FLUJO.

Como se estudió en los objetivos de Matemática de 7mo. grado, el concepto de algoritmo está íntimamente ligado a las operaciones que realizan las computadoras.

*Un **algoritmo** es un procedimiento esquemático que comprende un conjunto de pasos secuenciales ordenados para realizar un objetivo específico.*

Un algoritmo es una guía para resolver un problema, sin indicar la solución exacta del mismo.

*Un **diagrama de flujo** es una representación gráfica de un algoritmo.*

Por ejemplo, si consideras las actividades que realizas diariamente antes de ir a clases, podemos establecer el algoritmo mostrado en la fig. 28.1.

1. Levantarse de la cama.
2. Cepillarse los dientes.
3. Vestirse.
4. Acomodar los útiles escolares.
5. Desayunarse.
6. Tomar el transporte.

Fig. 28.1 Algoritmo que se establece al ir a clases.

En la fig. 28.2 se muestra el diagrama de flujo. Como observar, en el diagrama de flujo hay varios símbolos envueltos.

1. Al símbolo:  se le denomina **símbolo terminal** e indica el comienzo y el final del

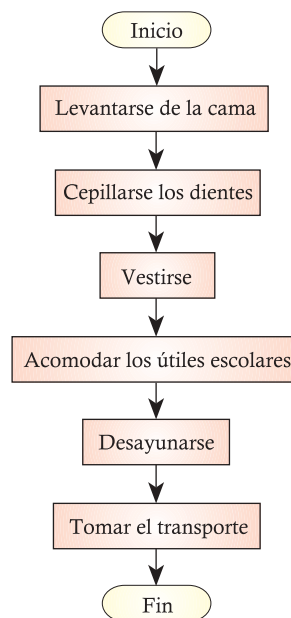


Fig. 28.2 Diagrama de flujo para el algoritmo de la fig. 28.1.

diagrama de flujo. Todo diagrama de flujo debe comenzar y terminar con este símbolo.

2. Las distintas partes del diagrama de flujo están conectadas mediante flechas que indican la secuencia cómo se realizan las distintas actividades u operaciones. Por ejemplo, después de desayunarse, el estudiante debe tomar el transporte, de acuerdo con lo que indican las flechas.
3. Los rectángulos del diagrama de flujo indican las operaciones que han de efectuarse. Así:

 *Vestirse*

establece que el estudiante debe vestirse.

EJEMPLO 28.1

Establece un diagrama de flujo que describa la operación de tomar un examen.

Solución

En la fig. 28.3 se muestra un diagrama de flujo que puede explicar la aplicación pedida.

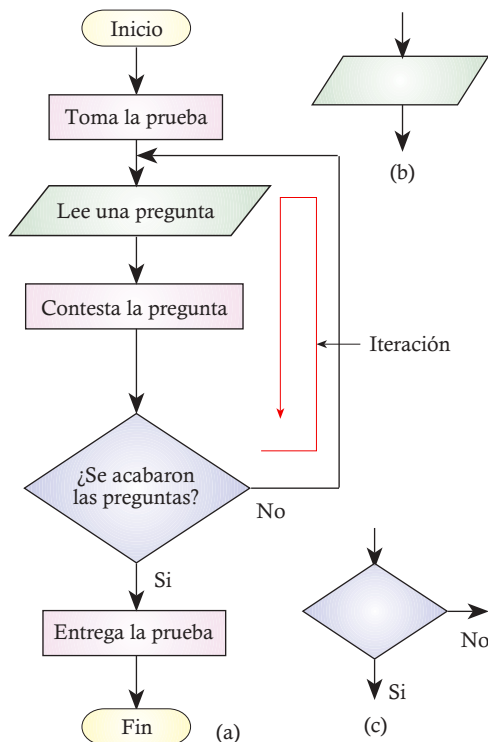
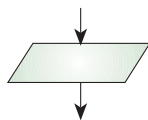


Fig. 28.3 (a) Diagrama de flujo que describe la operación de tomar un examen. (b) Símbolo de lectura o escritura. (c) Símbolo de decisión o transferencia.

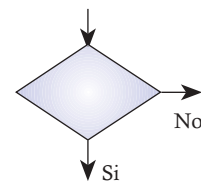
Como puedes observar, se han introducido dos nuevos símbolos. El primero de ellos se muestra en el dibujo que sigue. Es el *símbolo de entrada o de salida*, y contiene información que va a ser leída o va a ser escrita.



Símbolo de entrada o de salida

En el caso de este ejemplo, se va a leer una

pregunta. El otro nuevo símbolo corresponde a un *símbolo de decisión o transferencia*. En el interior de este símbolo hay siempre una pregunta que obliga a tomar una decisión de acuerdo a la respuesta de dicha pregunta. En este ejemplo, la interrogación corresponde a: "¿Se acabaron las preguntas?" Si la respuesta es "si", el estudiante entrega la prueba. Si la respuesta es "no", el estudiante lee otra pregunta hasta completarlas todas. *A la repetición de esta última operación se le conoce con el nombre de iteración y al recorrido que hay que hacer en el diagrama de flujo cuando se produce una iteración se le llama bucle*. En la fig. 28.3 (a) hay una iteración y por tanto un bucle.



Símbolo de decisión o de transferencia

EJEMPLO 28.2

Agreguemos más detalles al ejemplo anterior. Así, consideremos las posibilidades siguientes: **a)** Que el estudiante decida si puede contestar una pregunta. **b)** Que el estudiante decida si desea revisar las respuestas.

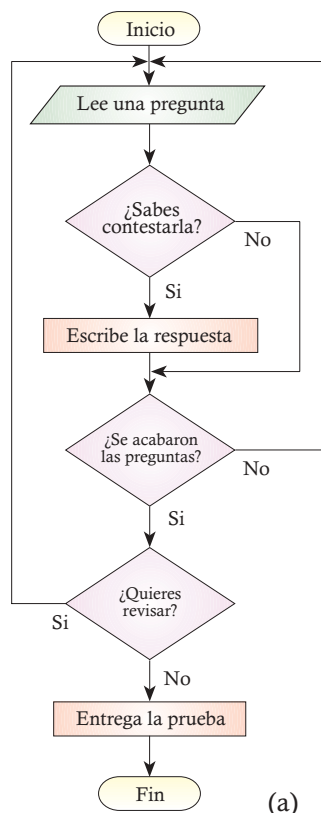
Solución

En la fig. 28.4(a) se muestra el nuevo diagrama de flujo que toma en cuenta los detalles mencionados. En dicha figura, aparecen tres símbolos de decisión y tres bucles.

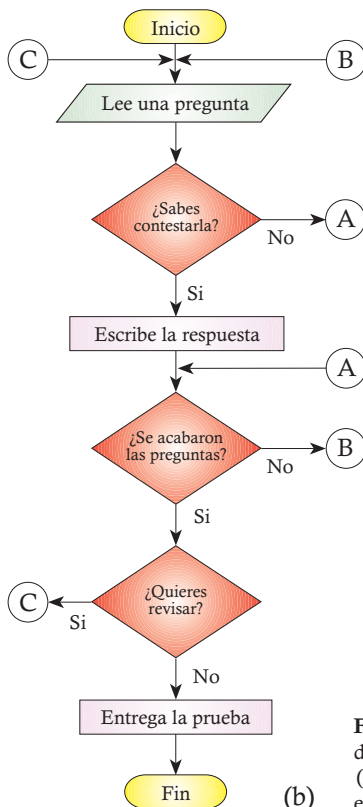
Cuando los diagramas de flujo se hacen más complicados, es práctica común utilizar el llamado **conector**, cuyo símbolo es:



Este símbolo se usa para conectar dos partes de un diagrama de flujo. Dentro del conector, el asterisco puede ser sustituido por cualquier símbolo, carácter



(a)



(b)

Fig. 28.4 (a) Diagrama de flujo que describe la operación de tomar un examen. (b) El mismo diagrama de flujo mostrando el uso de conectores.

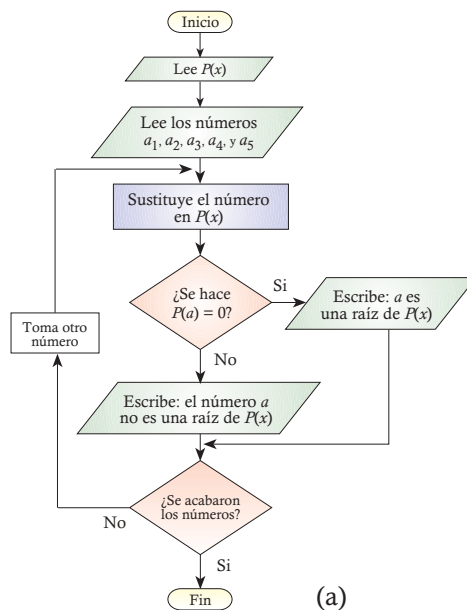
numérico o alfabético. En la fig. 28.4(b) se hace uso de varios conectores.

EJEMPLO 28.3

Construye un diagrama de flujo que permita determinar si N números dados son raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 3x - 10$. Para ver cómo funciona el diagrama de flujo, prueba los números $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 5$.

Solución

En la fig. 28.5 (a) se muestra un diagrama de flujo que efectúa la operación. El diagrama de flujo de la fig. 28.5 (b) también permite determinar si un número es raíz de un polinomio; sin embargo, se asigna inicialmente a la letra i el valor 0 ($i = 0$). Posteriormente, en el diagrama se incrementa este valor inicial en 1 ($i = i + 1 = 0 + 1 = 1$) y se determina si al efectuarse este incremento no se



(a)

Fig. 28.5 (a) Diagrama de flujo para determinar si un número cualquiera, a_i , es raíz de un polinomio $P(x)$.

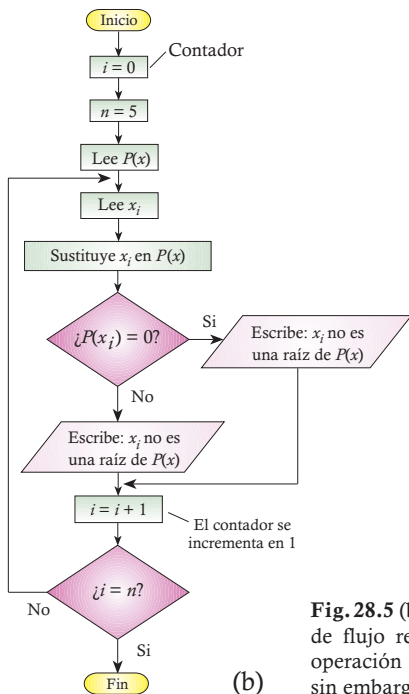


Fig. 28.5 (b) Este diagrama de flujo realiza la misma operación de (a). Incluye, sin embargo, un contador.

supera el valor de N , también especificado al comienzo. A la variable i , que figura en este diagrama de flujo, se le conoce con el nombre de *contador* y es un recurso ampliamente usado en los diagramas de flujo. Veamos cómo funciona en este último caso el diagrama de flujo para los valores dados de x :

Paso 1: $i = 0$

Paso 2: $N = 5$

Paso 3: $P(x) = x^2 - 3x - 10$

Paso 4: $x_0 = 1$ (observa que i ha sido reemplazada por 0).

Paso 5: $P(0) = 1^2 - 3 \cdot 1 - 10 = 1 - 3 - 10 = -12$.

Paso 6: como $P(0) \neq 0$, escribimos: "0 no es una raíz de $P(x)$ ".

Paso 7: $i = 0 + 1$. Aquí el contador ha sido incrementando en 1. Es decir, el valor de i es 1 ($i = 1$).

Paso 8: como $i < N$ ($1 < 5$), nos devolvemos al principio del diagrama para leer otro valor de x . La secuencia se inicia en el 4to. paso anterior.

Paso 4: $x_1 = -2$ (observa que i ha sido incrementado a 1 y por tanto, x_i pasa a ser x_1).

Paso 5: $P(-2) = (-2)^2 - 3(-2) - 10 = 4 + 6 - 10 = 10 - 10 = 0$

Paso 6: como $P(-2) = 0$, escribimos: "-2 es una raíz de $P(x)$ ".

Paso 7: $i = 1 + 1 = 2$. Observa que i cambia ahora a 2.

Paso 8: como $i < N$ ($2 < 5$), nos devolvemos nuevamente al comienzo del diagrama de flujo para leer el próximo valor de x_i .

El proceso continúa hasta que $i = N = 5$, en cuyo caso se detiene la operación.

EJEMPLO 28.4

Dibuja un diagrama de flujo que permita determinar la suma de los números naturales del 0 al 80. Prueba el diagrama de flujo con los 4 primeros números. Llama a la suma S .

Solución

El diagrama de flujo de la fig. 28.6 permite realizar la operación. Inicialmente, la suma se inicializa a cero ($S = 0$) y el contador i se hace también igual

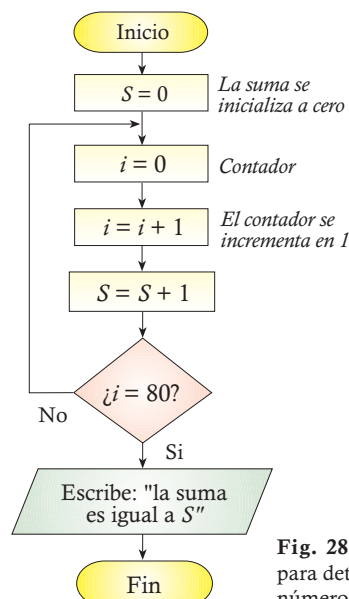


Fig. 28.6 Diagrama de flujo para determinar la suma de los números naturales de 0 a 80.

a cero ($i = 0$). Veamos cómo se realiza la suma para los 3 primeros números (0, 1, 2):

Paso 1: $S = 0$ (La suma se inicializa a 0).

Paso 2: $i = 0$ (El contador se pone a 0).

Paso 3: $i = 0 + 1 = 1$. Al valor anterior de i , cero, se le suma 1. i toma ahora el valor 1 ($i = 1$).

Paso 4: $S = 0 + 1 = 1$. Al valor anterior de S , cero, se le suma i . S toma ahora el valor 1 ($S = 1$).

Paso 5: Se compara i con 80. En este caso, $1 < 80$ y hay que volver al paso 3 del diagrama de flujo.

Paso 3: $i = 1 + 1 = 2$. Al valor anterior de i , uno, se le suma 1. i toma ahora el valor 2.

Paso 4: $S = 1 + 2 = 3$. Al valor anterior de S , uno, se le suma $i = 2$. S es ahora igual a 3.

Paso 5: Se compara i con 80. Como $2 < 80$, se vuelve al paso 3.

Paso 3: $i = 2 + 1 = 3$. i toma el valor de 3.

Paso 4: $S = 3 + 3 = 6$. A la suma anterior, $S = 3$, se le suma 3 para obtener 6 ($S = 6$).

Como puedes ver, se han sumado los números 0, 1, 2 y 3. El resultado de la suma de esos 4 números es 6. El proceso continúa hasta agotar todos los números.

EJEMPLO 28.5

Considera las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$

Dos fracciones son equivalentes si sus productos cruzados son iguales.

Entre dos fracciones de igual denominador, es mayor aquella que tiene mayor numerador. Es decir, si $b = d$ y $a > c$, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$.

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ tienen distintos denominadores:

a) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ si se cumple que $a \cdot d > b \cdot c$.

b) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si se cumple que $a \cdot d < b \cdot c$.

En base a lo anterior, elabora un diagrama de flujo que aplique los criterios de equivalencia y considere los dos casos anteriores en cuanto a desigualdades de fracciones.

Solución

La fig. 28.7 muestra la solución.

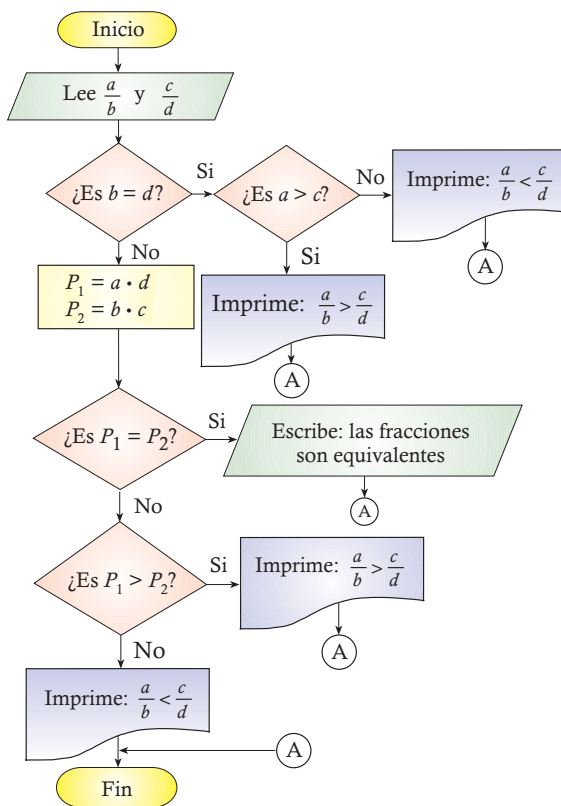
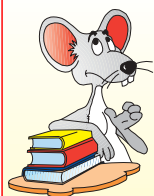


Fig. 28.7 Diagrama de flujo que determina si dos fracciones son equivalentes y establece la desigualdad de dos fracciones. Ejemplo 28.5.

En este diagrama de flujo se ha introducido un nuevo símbolo:



que corresponde a un *símbolo de lectura o escritura*.



EJERCICIOS



28.1 Muestra un diagrama de flujo que describa la operación de cepillarse los dientes.

28.2 Se tiene un conjunto de 10 números naturales y se desea saber cuáles de ellos son pares. Dibuja el diagrama de flujo correspondiente.

28.3 Se tiene un conjunto de 10 números naturales y se desea saber cuáles de ellos son impares. Dibuja el diagrama de flujo correspondiente.

28.4 Elabora un diagrama de flujo para determinar entre un grupo de 20 números, cuáles son divisibles entre 5.

28.5 Elabora un diagrama de flujo para determinar entre un grupo de 50 números, cuáles son divisibles entre 3.

28.6 Diseña un diagrama de flujo que permita obtener el promedio de las notas en cualquier asignatura.

28.7 Dibuja un diagrama de flujo para determinar: **a)**Cuál es mayor entre dos números. **b)**Cuál, de 10 números, es el menor.

28.8 Dibuja un diagrama de flujo que permita determinar si dos triángulos son congruentes. Usa el criterio LLL.

28.9 Elabora un diagrama de flujo que efectúe separadamente la adición de los números pares e impares de un grupo de 100 números.

28.10 Elabora un diagrama de flujo que permita efectuar la adición de fracciones de iguales y diferentes denominadores.

29

LENGUAJES DE PROGRAMACIÓN

29.1 LENGUAJES DE PROGRAMACIÓN

Los diagramas de flujo permiten establecer los pasos que deben seguirse para la solución de un problema. Usualmente, quien diseña un diagrama de flujo asocia la ejecución del mismo con un sistema de computación. Una vez establecido el diagrama de flujo es, entonces, necesario darle al computador las instrucciones para que efectúe las operaciones allí planteadas. Esto se hace mediante los llamados *lenguajes de programación*.

*Un lenguaje de programación es un conjunto de instrucciones que permiten a un computador realizar una tarea específica. Al conjunto de instrucciones escritas en un lenguaje de programación se le denomina **programa**.*

En el pasado se han desarrollado varios *lenguajes de programación* que facilitan la comunicación hombre-máquina. El llamado *lenguaje de máquina* es, realmente, el único lenguaje que entiende un computador. Este lenguaje está íntimamente asociado con los componentes electrónicos que integran al mismo. En otras palabras, los circuitos lógicos que lo conforman sólo responden a instrucciones en lenguaje de máquina. Las instrucciones, en este caso, son conjuntos de unos y ceros que indican a la máquina a la tarea a realizar.

El lenguaje de máquina varía de un tipo de computador a computador y, por tanto, los programas que lo usan son útiles para el computador para el cual se desarrolló. La programación en este lenguaje es complicada y difícil de ser analizada por un usuario cualquiera.

Para soslayar los problemas asociados con el lenguaje de máquina, se desarrollaron los llamados *lenguajes de alto nivel*. Entre esos lenguajes podemos

mencionar algunos de los que han alcanzado gran difusión: **ALGOL**, **PL/1**, **FORTRAN**, **COBOL**, **BASIC**, **PASCAL** y **C**.

Los lenguajes de alto nivel reúnen las siguientes características:

1. Sus instrucciones se parecen a las que ordinariamente utilizaría una persona para ordenar la realización de una acción. Así por ejemplo, instrucciones típicas son: **WRITE** (escribe), **PRINT** (imprime), **READ** (lee).
2. Son realmente independientes de la máquina que se utiliza. Sólo se requieren modificaciones pequeñas para “correr” los programas en distintos computadores.

Generalmente, las instrucciones de los distintos lenguajes están escritas en idioma inglés (“**GO TO**”, “**FOR**”, “**NEXT**”, etc.).

Como los computadores sólo entienden el lenguaje de máquina, es necesario utilizar un programa especial llamado *compilador*, que traduzca los lenguajes de alto nivel a lenguaje de máquina.

29.2 TIPOS DE SOFTWARE

Al conjunto de lenguajes que se utilizan en un computador se le conoce con el nombre genérico de *software* y comprende tres grandes categorías: *software de sistema*, *software de lenguaje* y *software de aplicación*.

29.2.1 Software de sistema: también denominados *sistemas operativos*, es un programa escrito generalmente en lenguaje de máquina, para controlar el *hardware* asociado al computador: teclado,

monitor, ratón, impresoras, memorias internas (RAM y ROM), memorias externas (disco duro, memorias «flash», discos flexibles, etc), cámaras digitales, «scanners» y una gran gama de dispositivos periféricos que, día a día, se incorporan a los sistemas computarizados.

Entre los sistemas operativos más conocidos podemos citar los siguientes: MS/DOS, UNIX, Mac OS, y WINDOWS. Estos sistemas evolucionan permanentemente con las modificaciones que se agregan a los mismos. Así se habla de WINDOWS 98, WINDOWS XP, Mac OS 9.1, Mac OS X, que constituyen, a la fecha de la edición de este texto, versiones actualizadas, con respecto a las primeras que se concibieron.

29.2.2 Software de lenguaje: son grupos de instrucciones que permiten al usuario crear programas de aplicación. Los softwares de lenguajes o de programación traducen los programas escritos por los usuarios en sentencias equivalentes al código de máquina que, como hemos visto, es el lenguaje que entiende el computador.

Esta categoría comprende, entre otros, los siguientes softwares: Pascal, Basic, Cobol, Lenguaje C, Clipper, Foxbase, Visual Basic, Fortran.

29.2.2 Software de Aplicación: son programas diseñados y escritos para realizar tareas específicas que pueden ser personales, empresariales, institucionales o científicas. Dentro de este tipo de software podemos citar: el procesamiento de nóminas, la administración de los recursos humanos o el control de inventarios, software de hoja de cálculo, de diseño asistido por computadoras (CAD), de procesamiento de texto, de manejo de bases de datos, etc. Todas estas aplicaciones procesan datos y generan información de interés para el usuario.

29.3 LENGUAJES DE PROGRAMACIÓN

El lenguaje de programación es el instrumento mediante el cual las personas pueden comunicarse con el computador. Un lenguaje de programación está basado por un conjunto de caracteres, símbolos, palabras e instrucciones que permiten al

programador dar las órdenes necesarias para que el computador lleve a cabo determinadas tareas.

Algunos de los lenguajes de programación requieren de un proceso de traducción para transformarse en instrucciones entendibles por el computador.

La comunicación con un computador se realiza a través de tres tipos de lenguajes de programación: *lenguaje de máquina*, *lenguaje ensamblador* y *lenguaje de alto nivel*. A continuación describimos las características de cada uno de estos lenguajes.

29.3.1 Lenguaje de Máquina: es el único lenguaje que entiende directamente el computador. Las instrucciones en este lenguaje corresponden a una sucesión de ceros y unos (0 y 1), que le indican a los componentes electrónicos del hardware cómo deben responder.

En un principio, los programas de computación se escribían en lenguaje de máquina; pero, al pasar el tiempo, fue sustituido por otros lenguajes menos complicados y más fáciles de aprender y utilizar.

Realizar un programa en lenguaje de máquina resulta sumamente complicado y difícil, ya que es necesario conocer las características internas de los circuitos integrados de cada computador.

Del lenguaje de máquina podemos decir:

1. Fue el primer lenguaje utilizado para programar en las computadoras.
2. Utiliza el sistema de numeración binario, el cual consta de los dígitos 0 y 1, a los que se denominan bits.
3. Se presentan dificultad y lentitud en la codificación de los programas, por las interminables listas de unos y ceros.
4. Un programa escrito en lenguaje de máquina es procesado con mayor rapidez que otros lenguajes.
5. Los errores que se cometen en la elaboración de los programas resultaban difíciles de detectar y corregir.

29.3.2 Lenguaje Ensamblador o ensamblador: viene a sustituir el lenguaje binario para evitar la necesidad de utilizar códigos binarios para definir las operaciones a efectuar por el computador. Para ello, utiliza un conjunto de símbolos o códigos nemotécnicos, que ofrecen una mayor comodidad y facilidad de programación, cuando se les compara con las asociaciones de ceros y unos. Como resultado, a los programadores les resulta más fácil escribir instrucciones en un lenguaje ensamblador que en un lenguaje de máquina.

Podemos destacar las siguientes características del lenguaje ensamblador:

1. Está representado por palabras denominadas códigos nemotécnicos (forma abreviada para representar códigos de operación con la intención de facilitar su respectiva memorización).
2. Es más fácil de crear y corregir los programas escritos en un lenguaje ensamblador que en lenguaje de máquina, por emplear grupos de letras en lugar de ceros y unos.
3. Los lenguajes ensambladores generalmente son dependientes del computador; es decir, dependen de un conjunto de instrucciones específicas de la máquina.
4. El lenguaje ensamblador de un computador no es, en general, compatible con el de otro modelo diferente.

29.3.3 Lenguaje de Alto Nivel: es un lenguaje de programación parecido al lenguaje natural usado por el hombre en sus relaciones interpersonales. El lenguaje de alto nivel es empleado hoy en día por todos los programadores del mundo. Consta de un conjunto de instrucciones, palabras y símbolos que permiten al usuario elaborar sus propios programas, sin necesidad de tener un conocimiento profundo de la arquitectura interna del computador.

Estos lenguajes intentan lograr la compatibilidad de un mismo programa en diversas computadoras; es decir, un programa de alto nivel se puede utilizar en diferentes marcas de computadoras, sin necesidad de realizarle modificaciones para que se pueda ejecutar.

A continuación, citamos las características del lenguaje de alto nivel:

1. Se asemeja mucho al lenguaje natural, de forma que el programa se puede leer y escribir en una forma más sencilla.
2. Son independientes del computador; es decir, un programa realizado en un lenguaje de alto nivel se puede procesar en distintas computadoras.
3. El programa no está referido al hardware de un computador específico.
4. Los programas escritos en un lenguaje de alto nivel no son directamente entendibles por el computador, sino que necesita de un traductor para convertir el lenguaje de alto nivel al lenguaje de máquina.
5. Se incrementa el tiempo de ejecución, ya que el lenguaje de alto nivel se debe traducir a lenguaje de máquina para ser entendible por el computador.
6. Por ser un lenguaje similar al lenguaje natural, la redacción y comprensión de los programas resultan más fáciles.
7. Reduce el tiempo de programación y por ende el costo de creación y mantenimiento de los programas.

Entre los lenguajes de alto nivel está el **Lenguaje C**, el cual es un lenguaje de programación estructurado, de propósito general, desarrollado con la finalidad de conseguir una herramienta ideal para la programación de sistemas que fuesen independientes del computador. Sus principales características son:

1. Cuenta con la particularidad de poder programar tanto en lenguaje de bajo nivel como en lenguaje de alto nivel.
2. Se puede utilizar, tanto para la programación de sistemas (diseño de sistemas operativos), como para aplicaciones de las más distintas.
3. Está íntimamente asociado con el sistema operativo UNIX, que cuenta con la particularidad de poder adaptarse a las arquitecturas de otras computadoras.

29.4. TRADUCTORES DE LENGUAJES

Generalmente, la mayoría de los programas están escritos en un lenguaje no entendible directamente por la computadoras; por lo tanto, necesitan de un traductor para ser convertidos en códigos comprensibles por éste.

El **traductor** está constituido por un conjunto de instrucciones que permiten transformar un *programa fuente* (programa inicial escrito por el usuario) a un *programa objeto* (instrucciones en lenguaje de máquina).

29.4.1 Tipos de Traductores de Lenguaje

Básicamente existen dos tipos de traductores de lenguajes: *Intérpretes* y *Compiladores*.

Intérpretes: son programas traductores donde la traducción se realiza instrucción por instrucción y por cada una de estas se generan varias instrucciones en lenguaje de máquina. Es decir, se lee cada una de las instrucciones del programa fuente, se interpreta y se ejecuta, obteniéndose el resultado inmediato de cada instrucción procesada.

Sus principales características son:

1. Los intérpretes, contrario a los compiladores, al ejecutar instrucción por instrucción, no almacena un programa objeto (instrucciones en lenguaje de máquina).
2. El tiempo de ejecución es muy lento en comparación a la velocidad de procesamiento de un programa compilado.
3. La depuración del programa es más fácil de realizar ya que el intérprete avisa continuamente si se ha cometido algún error.
4. Elimina la necesidad de «correr» nuevamente todo el programa después de cada modificación o corrección que se haya realizado a éste.

El lenguaje BASIC es ejemplo de un programa intérprete.

Compiladores: son programas traductores que generan, por cada instrucción del programa fuente muchas instrucciones en código de máquina, quedando almacenados en un programa objeto que se crea automáticamente al traducir las instrucciones.

Existe un compilador para cada lenguaje de alto nivel, es decir hay compiladores para FORTRAN, COBOL, PASCAL, PL/1, etc.

Sus principales características son:

1. Se realiza la traducción completa de todo el programa fuente, creando el programa objeto, en caso de no existir errores en las instrucciones del programa.
2. El tiempo de ejecución de un programa compilado es relativamente rápido.
3. Al agregar o corregir instrucciones en el programa fuente, éste debe ser nuevamente compilado.

29.5 SISTEMAS OPERATIVOS

El *sistema operativo* es un conjunto integrado de programas que controla los recursos disponibles de un computador, así como también las actividades generales del sistema. Todo sistema operativo aprovecha, eficientemente, los recursos del computador y facilita al máximo su operación.

Una vez encendido, el computador, el sistema operativo es el primer programa que se carga en la memoria principal, permitiendo así la comunicación entre el computador y el mundo exterior.

Todos los sistemas de cómputos desde los *mainframes* hasta las *computadoras personales* trabajan bajo la supervisión y control de un sistema operativo.

1.4.1. Ventajas de un Sistema Operativo.

1. Crea un entorno adecuado para la comunicación.
2. Proporciona grandes facilidades al usuario, quitándole la responsabilidad de operación y de índole operacional.

3. Permite al usuario el manejo sencillo de todos los recursos (memoria, procesador, dispositivo de E/S, etc.) comando y lenguajes que disponga la computadora.

- Sistemas de redes de computadoras.
- Sistemas distribuidos.
- Sistemas virtuales.

1.4.2. Funciones de un Sistema Operativo.

1. Supervisa y controla el funcionamiento de la Unidad Central y todas las operaciones de mantenimiento de Entrada/Salida (impresora, monitor, teclado, etc.)
2. Asigna los recursos del computador a los procesos a ejecutarse.
3. Planifica y asigna los procesos respetando el orden de prioridades otorgados a cada uno de ellos.
4. Libera los recursos del computador una vez que estos hayan sido utilizados y liberados por el proceso.
5. Maneja los posibles errores que puedan presentarse tanto en el hardware como en el software.
6. Brinda mecanismo de protección de la información para que no pueda ser destruido en forma accidental o utilizada en forma ilegal.

1.4.3. Clasificación de los Sistemas Operativos.

La clasificación de los sistemas operativos se puede realizar bajo diferentes esquemas. Una posible clasificación puede ser:

- Sistemas dedicados.
- Sistemas mono usuarios.
- Sistemas en tiempo real.
- Sistemas multi usuarios:
- Sistemas de multiprogramación o multitareas.
- Sistemas de procesamiento por lotes
- Sistemas en tiempos compartidos.
- Sistemas de multiprocesamientos.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

Ejercicio 1.1

a) $a = \{(1, 5), (2, 5), (3, 4)\}$	Dominio = $\{1, 2, 3\}$	Rango = $\{5, 4\}$
b) $b = \{(-1, 0), (4, 1/2), (3, -3)\}$	Dominio = $\{-1, 4, 3\}$	Rango = $\{0, 1/2, -3\}$
c) $c = \{(5, 6), (3, 1), (-2, -3/4)\}$	Dominio = $\{5, 3, -2\}$	Rango = $\{6, 1, -3/4\}$
d) $d = \{(7, 1), (4, 1)\}$	Dominio = $\{7, 4\}$	Rango = $\{1\}$
e) $e = \{(3, 0), (3, 1/4), (-1, 6)\}$	Dominio = $\{3, -1\}$	Rango = $\{0, 1/4, 6\}$
f) $f = \{(-1/2, 8), (2, -1), (0, 8), (0, 11)\}$	Dominio = $\{-1/2, 2, 0\}$	Rango = $\{8, -1, 11\}$

Ejercicio 1.2

a) Dominio $f = \{5, -2, 4\}$	Rango $f = \{-3, 1, 3\}$
b) Dominio $g = \{-7, 5, 6\}$	Rango $g = \{0, -3\}$
c) Dominio $h = \{0, -3, -2\}$	Rango $h = \{5, -2, 1\}$
d) Dominio $r = \{a, c, o\}$	Rango $r = \{b, d, o\}$
e) Dominio $s = \{5, 3, -7/2\}$	Rango $s = \{1\}$
f) Dominio $y = \{2\frac{1}{4}, -1/9, 0\}$	Rango $y = \{-2, 1\}$

Ejercicio 1.3 a) -5 b) 5 c) 2 d) $\{5, 3/4, -3, 1\}$ e) $\{1, 2, -5, 0\}$

Ejercicio 1.4

a) f es una función	Dominio: $\{a, b, c, d\}$	Rango: $\{0, 1, 2\}$
b) f es una función	Dominio: $\{a, b, c\}$	Rango: $\{1/4\}$
c) g es una función	Dominio: $\{a, b, c\}$	Rango: $\{-2, 1/2, 1/4\}$
d) g es una función	Dominio: $\{a, b, c, d\}$	Rango: $\{-3/5, 1/8, 2\}$
e) h no es función	Dominio: $\{a, b, c\}$	Rango: $\{-1, -5, -3\}$
f) h es una función	Dominio: $\{b, d\}$	Rango: $\{0\}$

Ejercicio 1.5

a) No es una función	Dominio: $\{\text{Bombillo, Nevera, Esfuerzo}\}$	Rango: $\{\text{Luz, Calor, Frío, Cansancio}\}$
b) Es una función	Dominio: $\{\text{Loco, Morir, Mandar, Muro}\}$	Rango: $\{\text{Fallecer, Demente, Ordenar, Pared}\}$

Ejercicio 1.6

a) La imagen de 1 es -4	La imagen de -1 es -6	La imagen de 2 es -3
b) La imagen de 1 es 6	La imagen de -1 es -2	La imagen de 2 es 4
c) La imagen de 1 es 1	La imagen de -1 es -1	La imagen de 2 es 8
d) La imagen de 1 es 1	La imagen de -1 es $-1/2$	La imagen de 2 es 3
e) La imagen de 1 es 0	La imagen de -1 es 0	La imagen de 2 es 0
f) La imagen de 1 es 3	La imagen de -1 es 3	La imagen de 2 es 3

Ejercicio 1.7

a) $B = \{1, 0, 5, -3\}$	b) $B = \{0, 4, -4, -8\}$	c) $B = \{3, 4, 11, 30\}$
d) $B = \{-5/2, -3, -7/2\}$	e) $B = \{40/3, 200/9, 260/9\}$	

Ejercicio 1.8

- a) $y = f(x) = x^2$ b) $y = f(x) = 1/x$ c) "es el antónimo de" d) $y = f(x) = x^0$

Ejercicio 1.9

- a) Dominio: $\{2, 0, 1, 3\}$ b) Dominio: $\{1, 6, 2\}$
 c) Dominio: $\{2, 3, 1\}$ d) Dominio: $\{\text{Flaco, Bajo, Frío, Morir}\}$

Ejercicio 1.10

- a) No es función biyectiva b) Es función biyectiva
 c) No es función biyectiva d) No es función biyectiva

Ejercicio 2.5 a) 56 b) 4 c) -12 d) 11 e) 21 f) -80**Ejercicio 2.6**

- a) -4 b) -18 c) 59 d) 32 e) -1
 f) 5 g) 4 h) 6 i) -4

Ejercicio 2.7

- a) 4 b) -3 c) 10 d) 2 e) -2 f) -2 g) -4 h) -3 i) 3 j) -25

Ejercicio 2.8

- a) $x = -1$ b) $x = -1$ c) $x = 1$ d) $x = 1$ e) $x = -1$ f) $x = -1$

Ejercicio 2.9

- a) -72 b) 36 c) 25 d) -40 e) -551 f) -11

Ejercicio 2.10

- 1) 13 2) 11 3) 15 4) 34 y 35 5) 72 y 74
 6) 45 y 47 7) 6 8) 22 y 25 9) 123 y 127 10) 67 y 134
 11) 42 y 126 12) 4 y 12 13) 28 y 56 14) Pedro: 17, Luis: 43
 15) Irene: 20, Antonio: 14 16) Pedro: 46, su hijo: 23
 17) Héctor: 12, padre: 41 18) 13 varones y 18 hembras
 19) Primero: Bs. 25, segundo: Bs. 50, tercero: Bs. 75
 20) Carro de Alfredo: Bs. 3.000.000, carro de Luis: Bs. 1.000.000 21) -5

Ejercicio 3.1 $\left\{ \dots, -\frac{4}{12}, -\frac{3}{9}, -\frac{2}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \dots \right\}$ **Ejercicio 3.2** $\frac{1}{3}$

Ejercicio 3.3 a) $\frac{11}{6}$ b) -1 c) $\frac{1}{2}$

Ejercicio 3.4 a) $\frac{11}{6}$ b) $-\frac{31}{42}$ c) $-\frac{109}{30}$ d) $\frac{37}{4}$ e) $-\frac{61}{90}$ f) $\frac{17}{16}$

Ejercicio 3.5 a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{5}{6}$ c) -9 d) $-\frac{113}{33}$ e) $-\frac{7}{18}$ f) $-\frac{7}{5}$

Ejercicio 3.6 a) $\frac{19}{8}$ b) $-\frac{7}{24}$ c) $\frac{23}{15}$ d) $\frac{1}{40}$ e) $\frac{51}{11}$ f) $\frac{5}{6}$

Ejercicio 3.7 a) $\frac{17}{18}$ b) $-\frac{29}{120}$ c) $-\frac{33}{22}$ d) $-\frac{7}{45}$

Ejercicio 3.8 a) $-\frac{2}{7}$ b) $-\frac{4}{3}$ c) $-\frac{7}{15}$

Ejercicio 3.9 a) $-\frac{7}{16}$ b) $\frac{1}{90}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $-\frac{1}{2}$

Ejercicio 3.10 a) $\frac{8}{3}$ b) $-\frac{7}{4}$ c) $-\frac{4}{29}$ d) -1

Ejercicio 3.11 a) $\frac{107}{525}$ b) $-\frac{307}{378}$ c) $-\frac{359}{1440}$

Ejercicio 3.12 a) 6 b) $-\frac{15}{4}$ c) $\frac{28}{9}$ d) -14 e) $\frac{5}{32}$ f) $-\frac{5}{6}$

Ejercicio 3.13 a) $-\frac{2}{5}$ b) $-\frac{47}{8}$ c) $-\frac{33}{40}$ d) -84

Ejercicio 3.14 Se necesitan 1.833,33 m.

Ejercicio 3.15 Le queda Bs. 135, 42

Ejercicio 3.16 a) 3 veces b) 2 veces

Ejercicio 3.17 a) $\frac{1}{72}$ b) 15 veces

Ejercicio 3.18 a) 20 b) $-\frac{9}{2}$ c) $\frac{1}{20}$ d) -8

Ejercicio 3.19 a) 450 b) 1.620 c) 2.430

Ejercicio 10.2 a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \langle -4, -4 \rangle$ b) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \langle 0, 5; 3 \rangle$
c) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \langle -3, -6 \rangle$ d) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \langle 4, -2 \rangle$

Ejercicio 10.4 a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \langle 1, 3 \rangle$ b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \langle 2, -2 \rangle$

Ejercicio 10.5 a) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \langle 0, 0 \rangle$ b) $\vec{v} + (-\vec{v}) = \langle 0, 0 \rangle$ c) $\vec{w} + (-\vec{w}) = \langle 0, 0 \rangle$

Ejercicio 10.8 a) $2\vec{u} = \langle 4, 4 \rangle$, la misma dirección, el doble del módulo, el mismo sentido.
b) $-2\vec{u} = \langle -4, -4 \rangle$, la misma dirección, el doble del módulo, sentido contrario.
c) $\frac{1}{2}\vec{u} = \langle 1, 1 \rangle$, la misma dirección y sentido, la mitad del módulo.
d) $\frac{1}{2}\vec{u} = \langle -1, -1 \rangle$, la misma dirección, la mitad del módulo, sentido contrario.

Ejercicio 10.9 a) $\langle 5, 2 \rangle$ b) $\langle 0, 6 \rangle$ c) $\langle 0, 3 \rangle$

Ejercicio 10.10 a) $\langle -5, -2 \rangle$ b) $\langle \frac{5}{2}, 1 \rangle$ c) $\langle \frac{15}{2}, 3 \rangle$ d) $\langle 5, 2 \rangle$

Ejercicio 10.11

$$a) = \langle -2, 4 \rangle \quad b) = \langle -2, 1 \rangle \quad c) = \langle 2, -2 \rangle \quad d) = \langle -1, 7 \rangle \quad e) = \langle 4, -8 \rangle \quad f) = \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{9}{2} \right\rangle$$

Ejercicio 10.12

$$a) = \langle -1, 0 \rangle \quad b) = \langle -6, 0 \rangle \quad c) = \langle -12, 0 \rangle \quad d) = \langle -5, 0 \rangle \quad e) = \langle -27, 0 \rangle \quad f) = \langle -4, 0 \rangle$$

Ejercicio 17.1 $\alpha = \varepsilon = \lambda = \gamma = 57^\circ$ $\mu = \phi = \beta = \delta = 123^\circ$

Ejercicio 17.2 $\alpha = \beta = \mu = \phi = 70^\circ$ $\gamma = \delta = \varepsilon = \lambda = 110^\circ$

Ejercicio 17.3 $\alpha = \lambda = \phi = 40^\circ$ $\beta = 140^\circ$

Ejercicio 17.4 $\gamma = \delta = 60^\circ$ $\beta = \phi = 120^\circ$

Ejercicio 17.5 $\beta = \phi = 120^\circ$ $\alpha = 50$

Ejercicio 18.1

a) Términos: $-x^4, x^3, -4x^2$ Grado: 4 Coeficientes: $-1, 1, -4, 0, 0$ Término independiente: 0

b) Términos: $-2x^2, 5x, -8$ Grado: 2 Coeficientes: $-2, 5, -8$ Término independiente: -8

c) Términos: $5x^5, \frac{1}{3}x^2, \frac{2}{5}$ Grado: 5 Coeficientes: $5, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{5}$ Término independiente: $\frac{2}{5}$

d) Términos: $7x^6, -4x^2$ Grado: 6 Coeficientes: $7, 0, 0, 0, -4, 0, 0$ Término independiente: 0

Ejercicio 18.2 a) Polinómica b) No polinómica c) No polinómica
d) No polinómica e) No polinómica f) No polinómica

Ejercicio 18.3

a) Decreciente: $-\frac{2}{3}x^5 + 8x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x + 0$ Creciente: $0 - x + 0x^2 + 2x^3 + 8x^4 - \frac{2}{3}x^5$

b) Decreciente: $-\frac{2}{3}x^5 + 8x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x + 0$ Creciente: $0 - x + 0x^2 + 2x^3 + 8x^4 - \frac{2}{3}x^5$

c) Decreciente: $-3x^4 + 0x^3 + \frac{4}{9}x^2 - 5x + 1$ Creciente: $1 - 5x + \frac{4}{9}x^2 + 0x^3 - 3x^4$

d) Decreciente: $-2x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{2}{7}$ Creciente: $\frac{2}{7} + \frac{3}{8}x - 2x^2$

Ejercicio 19.1

a) $8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
b) $3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$
c) $4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

Ejercicio 19.2

a) Suma: $9.899 = 9 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
b) Suma: $85.778 = 8 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$
c) Suma: $859 = 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$

Ejercicio 19.4

a) $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ b) $-x^3 - 3x^2 + 8x - 1$ c) $3x^5 + 2x^2 + 7x - 2$ d) $x + 1$ e) 0

f) $\frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{7}{2}$ g) $-\frac{5}{4}x^5 + 3x^2 + 7x + 2$ h) $(m-3)x^2 + (n+1)x + (p-4)$

Ejercicio 20.1 a) $\frac{4}{3}x^3 - 8x^2 - \frac{5}{3}x + 1$ b) $x^3 + 3x^2 - 3x - 5$

Ejercicio 20.2 a) $-5x^5 + 4x^4 + \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{20}{7}$ b) $-4x^3 + 5x^2 - x + \frac{5}{3}$

Ejercicio 20.3 a) $-5x^7 - 8x^2 + 3x - 1$ b) $-4x + 3$ c) -4 d) $\frac{1}{3}x^7 - 3x^6 - \frac{1}{5}x^2$

Ejercicio 20.4 a) $-x^2 + 3x + 1$ b) $5x^3 - 18x^2$ c) $-x^4 + 2x^2$ d) $5x^3 - 8x + 1$
e) $x^6 + 3x^5 + 4x^2 - x - 4$ f) $-4x^4 + 2x^3 - 3x - 3$

Ejercicio 20.6 a) $-4x^p + 4x^q - 9$ b) $(a-m)x^{n+1} + (b-p)x^n + c - q$

Ejercicio 21.1 a) 1.890 b) 10.044 c) 6.300

Ejercicio 21.2 a) $-10x^4 + 20x^2 - x + 5$ b) $-\frac{4}{3}x^2 + 5x - 8$ c) $\frac{8}{3}x^3 - \frac{10}{3}x + 2$ d) $-\frac{3}{8}x^5 - 2x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 1$

Ejercicio 21.3 a) $6x^9$ b) $-8x^3$ c) $-20x^6$ d) $2x^8$ e) $-\frac{2}{3}x^5$ f) $-x^3$

Ejercicio 21.4 a) $10x^4 - 15x^3 + 5x^2 - 5x$ b) $-6x^4 - 2x^3 - 4x^2$ c) $-2x^4 - \frac{9}{2}x^3 + x^2$ d) $-\frac{4}{3}x^4 + 2x^2 - \frac{4}{21}$

Ejercicio 21.5

a) $x^3 - 3x + 2$ b) $10x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 8x + 2$ c) $\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{8}x^3 + 3x^2 + \frac{23}{4}x - 6$

d) $5x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}$ e) $6x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 24x + 8$

f) $-3x^7 - 3x^6 - 3x^5 + 8x^3 + 5x^2 + 5x - 3$ g) $\frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{18}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - x - 18$

h) $\frac{1}{4}x^5 - \frac{11}{8}x^4 - \frac{37}{40}x^3 + \frac{12}{5}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{25}$ i) $3x^7 - 3x^6 + 11x^5 - 18x^4 + 33x^3 - 34x^2 + 20x - 21$

j) $x^7 - 2x^6 + 6x^5 - 6x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 3x + 4$

Ejercicio 21.6 $a = 2, b = 1$

Ejercicio 21.7 $a = 3, b = 6$

Ejercicio 21.8 $n = 2, m = 3$

Ejercicio 22.1

a) $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 3$ b) $\frac{3}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + \frac{1}{5}x - 2$ c) $-\frac{3}{8}x^6 + \frac{7}{6}x^5 + \frac{4}{3}x + 3$

Ejercicio 22.2

a) $24x^5 - 102x^4 + 85x^3 - 89x^2 + 46x - 14$ b) $-\frac{8}{5}x^7 - 2x^6 + \frac{24}{5}x^5 - \frac{8}{21}x^4 + \frac{18}{7}x^2 + \frac{129}{7}x^2 - 36x$

c) $-\frac{6}{25}x^3 + \frac{13}{7}x^2 - \frac{140}{70}x + 2$

Ejercicio 22.3

a) $2x^3 + 11x^2 - 7x - 20$ b) $3x^3 - 4x^2 - 7x$ c) $7x^2 + 7x - \frac{21}{4}$ d) $-9x^6 - 6x^4 + \frac{33}{10}x^3 + 3x^2 - \frac{11}{10}x$

e) $10x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 25x + 30$ f) $-x^3 + x^2 + 6$

Ejercicio 22.4

- a) $a^{2x} + a^x - 2$ b) $a^{2x} + 2a^x$ c) $x^{2n-1} + x^{n+2}$ d) $x^n + 3x^{n-1} + x^2 + 3x$
 e) $x^{2(n-1)} + 2x^{2n-1} + 3x^{n-1} + x^{2n} + 3x^n + 2$ f) $1 + x^{n+1} + x^n + x^{2n+1}$

Ejercicio 22.5

- a) $-5x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 15x + 2$ b) $6x^5 + \frac{65}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^3 + \frac{161}{20}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{41}{20}$ c) $-x^2 - 44x - 32$
 d) $-2x^3 + 5x^2 + 8x - 33$ e) $10x^4 - 5x^3 + 29x^2 - 110x + 21$ f) $3x^{n+1} - 9x^n - 4x^{n-1} - 6x - 6$

Ejercicio 23.1

- a) $x^2 + 14x + 49$ b) $x^2 + 20x + 100$ c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ d) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$
 e) $9x^2 + 24x + 16$ f) $36x^2 + 108x + 81$ g) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{16}$ h) $\frac{49}{81}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{16}{49}$

Ejercicio 23.2

- a) $(x+6)^2$ b) $(x+11)^2$ c) No es cuadrado perfecto
 d) $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2$ e) $(3x+5)^2$ f) $\left(5x + \frac{1}{10}\right)^2$

Ejercicio 23.3

- a) $16x^2 - 10x + 25$ b) $x^2 - 28x + 196$ c) $x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{64}$
 d) $x^2 - \frac{20}{11}x + \frac{120}{121}$ e) $25x^2 - 40x + 16$ f) $100x^2 - 20x + 1$
 g) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{15}{16}x + \frac{25}{64}$ h) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{10}x + \frac{49}{100}$

Ejercicio 23.4

- a) $(x-12)^2$ b) $(x-9)^2$ c) No es cuadrado perfecto
 d) $\left(x - \frac{5}{7}\right)^2$ e) $\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2$ f) No es cuadrado perfecto

Ejercicio 23.5

- a) $x^2 - 4$ b) $x^2 - 169$ c) $x^2 - \frac{1}{100}$
 d) $x^2 - \frac{1}{25}$ e) $16x^2 - 49$ f) $x^2 - m$
 g) $25x^2 + 40x + 16$ h) $9x^2 - 42x + 49$ i) $x^2x^2 - x^2$

Ejercicio 23.6

- a) $(x+5)(x-5)$ b) $(x+13)(x-13)$ c) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$
 d) $\left(x + \frac{4}{8}\right)\left(x - \frac{5}{8}\right)$ e) $(6x+4)(6x-4)$ f) $\left(\frac{1}{10}x + 1\right)\left(\frac{1}{10}x - 1\right)$
 g) $\left(\frac{2}{8}x - 4\right)\left(\frac{2}{8}x + 4\right)$ h) $(\sqrt{ax} + 1)(\sqrt{ax} - 1)$

Ejercicio 24.1

- a) x^3 b) $10x^5$ c) $-2x^2$ d) $-5x^4$ e) $22x^7$
 f) 11 g) $\frac{7}{11}x^2$ h) $\frac{3}{49}x^3$ i) $-\frac{9}{8}x$

Ejercicio 24.2

- a) $x - 3$ b) $6x^6 - 2x^4 + 10x$ c) $-10x^5 + 20x^3 + 5x - 2$ d) $\frac{3}{5}x^4 - \frac{18}{5}x^2 + \frac{1}{5}$
 e) $\frac{7}{8}x^3 - \frac{7}{9}x + \frac{2}{3}$ f) $-\frac{10}{9}x^8 + \frac{35}{24}x^6 + \frac{25}{21}x$

Ejercicio 24.3

- a) x^6 b) $5x^3$ c) $-7x$ d) $-8x^2$ e) $4x^6$ f) 2 g) $\frac{15}{16}x^6$ h) $-\frac{1}{10}x^2$ i) $\frac{3}{56}x^5$

Ejercicio 24.4

- a) $3x^3 - 9x + 6$ b) $16x^5 - 8x^3 - 2x$ c) $3x^5 - 4x + 6$
 d) $-10x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{5}$ e) $\frac{15}{8}x^3 - \frac{1}{2}x + 5$ f) $-\frac{4}{9}x^9 - \frac{20}{27}x^6 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{20}{3}x$

Ejercicio 24.5

- a) $(x + 3)(3x - 1)$ b) $(10x - 2)(3x^2 - 2x + 3)$ c) $(x - 7)(x + 2)$ d) $(9x + 5)(9x^2 - 5x + 7)$
 e) $(4x^2 + 2x + 2)(2x) + 1$ f) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2$ g) $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$ h) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$
 i) $(x^5 + 3x)(x^2 + 2) - 3x^2 - 9x + 4$ j) $(x^2 + x + 1)(3x^3 - 3x^2 + 8) - 8x - 12$

Ejercicio 25.1

- a) $P(0) = 4$ $P(-1) = 8$ $P(-1/3) = 140/27$ $P(1/2) = 25/8$
 b) $P(0) = -2$ $P(-1) = -9$ $P(-1/3) = -35/9$ $P(1/2) = 0$

Ejercicio 25.2

- a) $f(0) = 3/5$ $f(-1) = 57/20$ $f(2) = 81/10$ $f(1/3) = 133/180$ $f(-1/2) = 49/40$
 b) $f(0) = 0$ $f(-1) = 17/12$ $f(2) = -13/3$ $f(1/3) = -23/108$ $f(-1/2) = 11/24$

Ejercicio 25.3

No es un cero, $P(1) = -21$ No es un cero, $P(2) = -24$ No es un cero, $P(-3) = 11$ Es un cero, $P(8) = 0$

Ejercicio 25.4

$f(0) = -1/15$, $x = 0$ no es raíz $f(-1) = 2$, $x = -1$ no es raíz $f(1/5) = 0$, $x = 1/5$ es raíz
 $f(1/2) = 12/30$, $x = 1/2$ no es raíz $f(-1/6) = 0$, $x = -1/6$ es raíz

Ejercicio 26.1

1/6

Ejercicio 26.2

a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{4}{9}$ c) 0

Ejercicio 26.3

a) $P = 4/9$ b) $P = 2/9$

Ejercicio 26.4

$P = 5/6$

Ejercicio 26.5

Los dos sucesos son dependientes

Ejercicio 26.6

a) Son independientes b) 0,16

Ejercicio 26.7

a) 2/11 b) 6/55 c) 2/11 d) 4/55 e) 1/55

Ejercicio 26.8

$P(A \text{ y } B) = 1/18$

Ejercicio 26.9

$P(A \text{ y } B) = 1/40$

Ejercicio 26.10

$P(A \text{ y } B) = 1/8$

Ejercicio 27.1

- a) $\bar{x} = 5,71$ No tiene moda b) $\bar{x} = 6,20$ Moda = 7,8
c) $\bar{x} = 75,1$ Bimodal: 100 y 120 d) $\bar{x} = 15,9$ Bimodal : 14 y 15

Ejercicio 27.2 c) $\bar{x} = 15,7$ Trimodal: 14, 15 y 17

Ejercicio 27.3 Debe tener como mínimo 16,9

Ejercicio 27.4 Debe tener un promedio de 18,3

BILIOGRAFÍA

1. Drooyan I. Hadel W., Fleming F., Elementary Algebra, Structure and Skills, John Wiley & Sons, New York, 1977.
2. Baldor, A. Álgebra Elemental, Cultural Centroamericana S. A. Guatemala, 1962.
3. Person, R. V., Person, V. J., Practical Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1977.
4. Bronshtein, I., Semendiaev, K., Manual de Matemáticas para Ingenieros y Estudiantes, Editorial Mir, Moscú, 1982.
5. Courant, R., Robbins, H., ¿Qué es la Matemática?, Aguilar S. A. de Ediciones, Madrid, 1971.
6. Baldor, A., Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría, Cultural Venezolana S. A., Caracas, 1985.
7. Spiegel, M., Theory and Problems of Statistics, Schaum's Outline Series, Mc Graw Hill Book Co., New York, 1975.
8. Ribnikov, K., Historia de las Matemáticas, Editorial Mir, Moscú, 1987.
9. Figuera, J., Matemáticas 7º Grado, EDUVEN, Caracas, 1990.
10. Anderson, R., From Basic to Pascal, Tab Books Inc., Pennsylvania, 1982.
11. Albretch, B., Inman, D., Zamora, R., Level II Basic, John Wiley & Sons, 1980.